

微分基本公式之錯誤類型

劉湘川¹ 白宗恩² 鄭俊彥² 黃玉臺³
謝俊逸³ 陳建憲⁴ 蔡閔任⁵ 劉育隆⁶

¹ 亞洲大學生物與醫學資訊學系

² 國立臺中教育大學教育測驗統計所

³ 亞洲大學資訊多媒體應用學系

⁴ 大葉大學通識教育中心

⁵ 中洲技術學院通識教育中心

⁶ 亞洲大學資訊工程學系

摘要

本研究的主要目的在於針對目前大學一年級的微分基本公式，以 479 位大學生為施測對象，分析紙筆測驗後的結果，整理出大學生對於微分基本公式的錯誤概念，並分析試題變異數，以編製電腦化測驗之試題。

分析紙筆測驗以及電腦化測驗後，其信度都超過 0.90，表示試卷具有優良的信度，因電腦化測驗是依據錯誤概念所編製而成的，表示教師之後可參考本研究所整理出的錯誤概念命題，找出大學生對於微分基本公式的錯誤類型，接著進行補救教學。

關鍵字：微積分、錯誤類型、電腦化測驗

The error type of basic differential formula

Hsiang-Chuan Liu* Tsung-en Pai** Chun-yen Cheng**
Yu-Tai Huang*** Chun-Yi Hsieh*** Jhien-shien Chen****
Hung-jen Tsai***** Yu-Lung Liu*****

*Department of biomedical informatics, Asia University

**Graduate Institute of Educational Measurement and Statistics,
National Taichung University

***Department of applied informatics and multimedia, Asia University

****Liberal Arts Center, Da-yeh University

*****General Education Center, Chung Chou Institute of Technology

*****Department of computer science and information engineering,
Asia University

Abstract

To explore the error type of basic differential formula, we implement an pretest on 479 college freshmen. Analysing the variance of each error type, we develop a computerize test in multiple choice format.

Its statistic reliability for the outcome of the test excess 0.90. This implies that a Calculus teacher can identify student's misconception from one's result of the test, then proceed a remedial teaching.

Keywords : Calculus, Error type, Computerize test

壹、緒論

林怡如、何信助、廖年淼（2004）認為數學為科學之母，是開啟各種技術、職業與科學大門的鑰匙。數學是科學發展的動力，微積分的學習更是進入尖端科學發展的墊腳石，科學相關領域的科系皆將微積分列為必修課程，根據教育部統計處（2010）的統計資料顯示，大學部前十名人數最多之科系皆必修微積分（鄭俊彥、黃玉臺、謝俊逸、劉湘川、郭伯臣、劉育隆，2010）。

大學一年級是學習微積分的重要時期，由於某些學生在高中數學時有一些數學概念的誤解被忽視了，所以在這階段學習微積分時會跟某些概念混淆（Erdogan&Hasan, 2009），這時候老師就必需了解學生的錯誤概念在哪邊，好對症下藥。研究顯示，糾正學生的錯誤概念，將有利於他們學習（Chi & Roscoe, 2002; Suping, 2003）。因此，在確定學生對於微分基本公式的概念有所誤解後，老師就可根據學生的錯誤類型，導正他們的錯誤經驗，以促進學習。

算錯答案並非一件可恥的事情，錯誤在數學中和正確答案一樣的重要，錯誤幫助了數學的發展，錯誤幫助我們了解數學的來龍去脈，錯誤也可做為診斷的工具，讓教師了解學生心裡可能的想法（Schwarzenberger, 1984），而且在每個概念下，具體列出學生可能會發生的誤解，將有利於他們更清楚地界定規則（Maureen & James, 1997）。

所以評量是教學中重要的一部份，透過評量，學生可以知道學習的歷程與成果，教師可以清楚學生學習的情況。而隨著電腦科技的發展，越來越多的紙筆測驗轉換成電腦化測驗。傳統紙筆測驗所無法做到的多媒體試題、互動式測驗，皆可藉由電腦輕而易舉的達成，故善用電腦化測驗，可使測驗越來越多樣化（張玉茹、楊智為，2009）。

目前國內關於分析微積分的錯誤類型，以及利用微積分的知識結構為基礎，建立起電腦化測驗系統的相關研究，是非常少的，但是微積分卻又是大學部前十名人數最多之科系皆必修，所以本研究整理微分基本公式的錯誤類型，並且結合電腦化測驗，這對於微積分教學與學習而言，是一件非常重要的一件事情。但由於研究的時間有限，所以研究假設受試者已學好高中數學，而不探討大學新生在高中數學的錯誤概念。

綜合上面所述，本研究的目的有下列四項：

- 一、建置微分專家知識結構；
- 二、分析大學生對於微分基本公式的錯誤類型；
- 三、編製微分診斷之選擇試題；
- 四、建置電腦化測驗系統。

貳、文獻探討

一、微積分的錯誤概念

錯誤概念的產生，可能源自於學生日常生活中經驗的自我學習，也可能來自於學生對老師傳統機械式教學，所獲得不清不白的概念（呂溪木，1983）。Chi and Roscoe (2002) 也指出，當學習者在舊有的知識上，建立新的數學規則時，需要有一個明確的規則，否則學習者會產生錯誤的概念。

學生會使用有缺陷、但能夠解出答案的方法來解題目，而他們可能對這方法缺乏理解（Chi & Roscoe, 2002）。當學生能用錯誤方法解出答案時，似乎沒有任何理由讓他們丟棄掉自己的錯誤概念，只有在學生碰到困難，明白為什麼假設是錯誤時，他們才會修改自身的錯誤概念（Balk, 2007）。

Gardner and Montague (2003) 強調，良好的解決問題方式，是將一個代表性的問題轉化成能夠便於理解的結構，所以我們應該設計一種診斷測驗，測驗的題目是針對學生可能會發生的錯誤或概念上的困難，好誘導出學生的概念錯誤（Bell, 1978），而且發現學生認知上面的衝突比直接教導更為有效，教學最常被推薦的方法，就是去刺激學生的認知衝突，好幫助學生理解數學（Irwin, 1997），Swedosh and Clark (1997) 也利用介入衝突的方法，來幫助學生消除他們的誤解，因為迷思概念會導致出一個荒謬的結論，但是在學生的心目中那是正確的概念；所以教育是一個持續消除迷思概念及試驗的過程，好引導學習者正確理解。

所以對學習數學來說，找尋學生的錯誤概念是必需的，因為當學生了解自己的錯誤後，才能修正錯誤。在找尋相關文獻中，發覺國內、外對於微積分錯誤類型研究是相當少的，因此本研究利用紙筆測驗，來收集大學生對於微分基本公式的錯誤類型。

二、電腦化測驗

由於科技的發展，以及電腦的發達，有關電腦化測驗、電腦化適性測驗、線上測驗已經日趨發達，而且電腦化測驗在測驗的計分、回饋及迷思概念上的診斷愈來愈有效率，亦即採用電腦化測驗在講求時效的現代社會中，是一種測驗的最佳選擇（陳新豐，2005）。國外的 TOEFL 以及 GRE 均於 1998 年將紙筆測驗改成電腦化測驗，而台灣考選部也於 2006 年 6 月開始試辦，2008 年 6 月正式實施電腦化測驗（考選部，2010），由此可見電腦化測驗已愈來愈受到重視。

根據周倩與簡榮宏（1997）的研究指出，大部份的學生較信任線上測驗的結果，而且認為線上測驗具備效率上的優點而且也均能測出正確的實力。而何榮桂（1990）也認為電腦輔助測驗具提高測驗效率、試題呈現方式多元豐富、減少測量誤差、減少測驗時間及獲得額外測驗資訊等優點。

參考朱美珍、余仁朋、白玉華、李家璐、王士賓、盧建良（2009）所整理出來的微積分相關網站如表 1 所示，得知大部分的微積分線上測驗系統，都是著重於選擇題的電腦化測驗；非選擇題的部分，則是利用鍵盤上的文字，來替代特殊的數學符號，或者是利用填充題的方式來呈現。此原因是因為 HTML 無法顯示出數學符號，此時就需要利用 WORD 的方程式編輯器來編寫出數學公式，再轉換成圖片檔呈現在網頁上。

表 1 微積分相關網站整理

相關 網站 功能	北科大微積分電腦輔助學習網路研究室	交大微積分遠距教學實驗網路系統	嘉義大學應用數學系微分方程教學網站	WIMS 網路互動式多功能服務站	明新科技大學數學網站辛老師課程活動
數學公式呈現方式	圖形檔	Mathematica ltools	圖形檔	文字代碼轉換	文字代碼轉換
題目類型	非選擇、選擇題	非選擇*、選擇題	選擇題	非選擇、選擇題	非選擇、選擇題
非選擇題呈現方式	只針對答案為一般數值的題目，利用填充題的方式來呈現	遇到無法由鍵盤輸入的公式或符號，便以轉換碼進行作答	無	遇特殊符號或數學方程式，輸入網站設定的對應文字進行答題	遇特殊符號或數學方程式，輸入網站設定的對應文字進行答題
網頁使用語言	PHP	HTML	HTML	HTML	HTML
互動性	討論區	討論區	Q&A	討論區	留言版
成績回饋機制	將錯誤的答案呈現，未給成績，需另外下載解答	未告知答案對錯，需另外下載解答	作答完畢將答案送出後，有文字出現告知對錯與正解	答題完畢後，系統馬上告知對錯、正解與解答	測驗後給成績，考試截止後再告知答案公佈日期
測驗方式	下載 .pdf 或.doc檔，再進入網頁作答	用提示或步驟式的方法引導進行測驗	一個題目一個頁面的呈現，每題都完成作答始能進入下一題	一次只有一題測驗題目，由系統隨機出題。	使用投影片方式引導作答，一次只呈現一題題目。

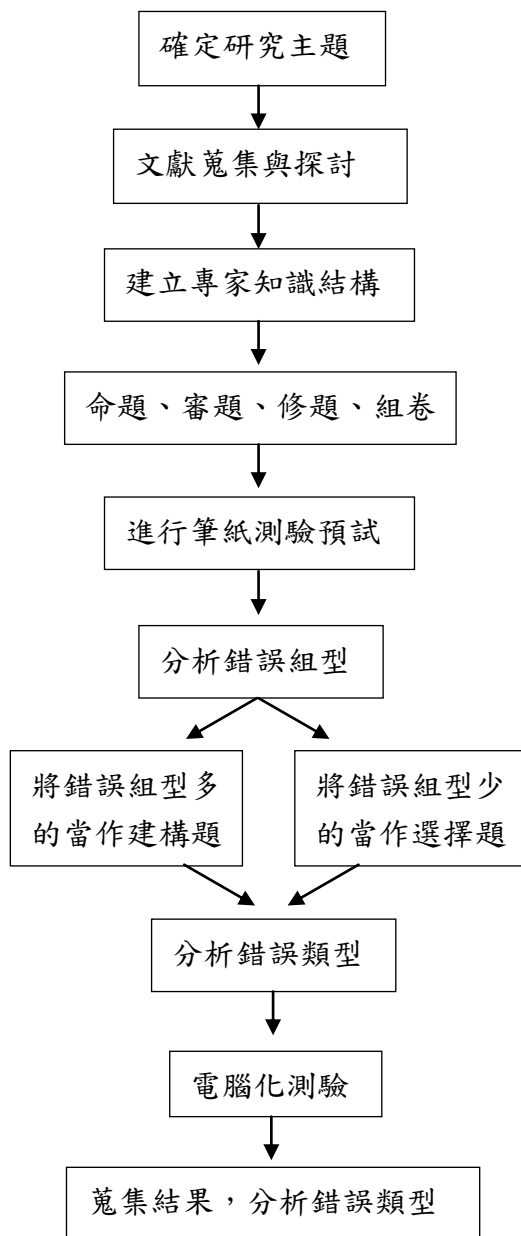
(資料來源：朱美珍、余仁朋、白玉華、李家璐、王士賓、盧建良整理，2009)

因此本研究以 PHP 程式為核心，結合了 JavaScript 以及 MathML 等相關技術，來建置電腦化測驗中的試題，讓學生能直接於電腦上解題，如此一來，系統可記錄學生解題的歷程、時間等，再利用這些資料配合答案卷分析出學生的錯誤概念。

參、研究設計與實施

一、研究流程

在確定研究主題後，即進行各種相關文獻的收集與探討，研究流程圖如圖一所示。



圖一 研究流程圖

(一) 事前準備

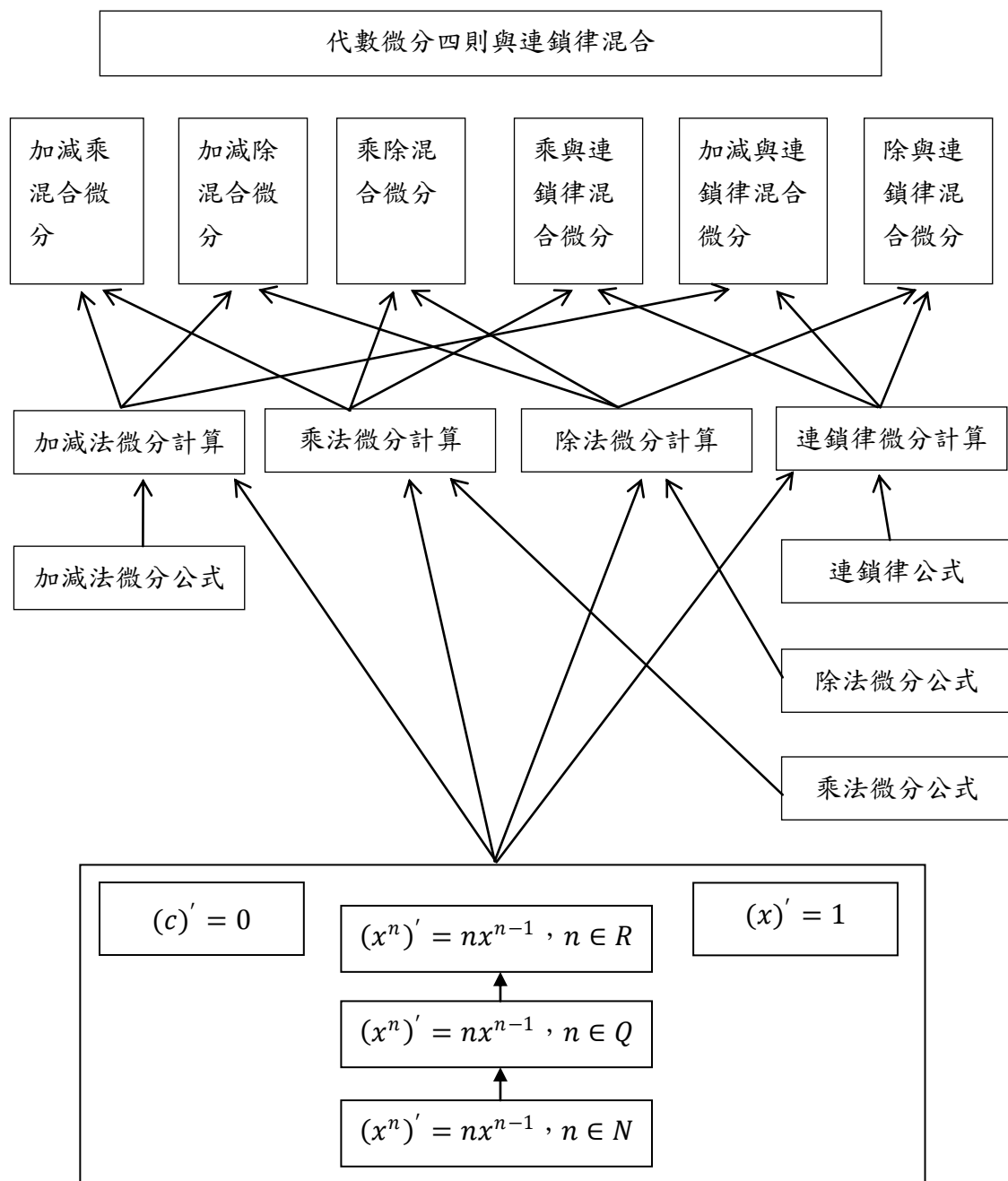
分析微積分的教材以及公式題型，並且與專家進行三次討論後，繪製出微分基本公式的知識結構，專家知識結構圖如圖二所示。

(二) 紙筆測驗的組卷

根據知識結構命題，每個知識節點命 1~3 題，採用 5 題選擇題，18 題計算題的型式。請專家審題，並根據專家意見修題。

(三) 錯誤組型

在預試後，蒐集與分析答題反應，整理歸納出錯誤組型。



圖二 專家知識結構

(四) 電腦化測驗

電腦化測驗的試題，依照紙筆測驗分析後的變異數如表 2 所示來命題，變異數大於 0.2 的當作建構反應題，其餘的題目則做為選擇題。再依據題目中犯錯次數大於 3 的錯誤組型，作為選擇題的選項。試卷中共有 5 題建構反應題，以及 18 題的選擇題。

分析變異數來選題，理由有以下兩點：

1. 選擇題

由於選擇題有選項限制，學生的答題狀況受限，作答情況變異性低的，表示

能代表學生真實狀況的程度有限，故不列入設為建構反應題型的參考。

2. 建構題

除選擇題外，從計算題中，挑選作答情況的多點計分之變異數高者作為建構反應題型。作答情況的變異數愈高，代表學生的錯誤組型種類愈多，建構反應題的答題狀況與受到選項限制的選擇題不同，直接記錄學生的計算過程與結果，適合用來診斷學生多樣的錯誤類型，故選取變異數大於 0.2 的計算題，作為建構反應題型如表 2 所示。

表2 各題變異數分析（灰底部份選為建構反應題）

題號	作答情況的多點計分之變異數
6	0.2378
8	0.2205
7	0.2121
14	0.2074
20	0.2027
21	0.2019
9	0.2011
23	0.2011
16	0.1777
18	0.1642
15	0.1602
12	0.1566
13	0.1529
19	0.1525
17	0.1504
22	0.1447
10	0.0852
11	0.0852

（五）錯誤類型

在電腦化適性測驗施測後，分析答題反應，由專家整理歸納出錯誤類型。

二、研究對象

本研究主要以大學一年級的學生為主要的研究對象，接受測驗的全部學生有 479 人，其中中州技術學院 267 人為筆紙測驗，亞洲大學 139 人以及虎尾科技大學 73 人為電腦測驗。

三、研究工具

本研究主要是探討大學一年級學生關於微分基本公式的概念，主要利用兩種方法來蒐集資料，一是紙筆測驗的試題，二是電腦化適性測驗的試題。其中紙筆測驗主要是用於蒐集錯誤組型，並與專家討論後整理成錯誤類型；再利用錯誤組型組卷，作為電腦化適性測驗的題目，並且在電腦化題目施測後，分析學生的作

答反應，以及試卷的信度。

(一) 紙筆測驗

紙筆測驗的試題為了提高試題品質，在施測前參考劉湘川、許天維、胡豐榮、郭伯臣（2003）所設計的內容檢核表，經修改後來檢核試題，檢核後確定預試的題目如附件一所示。

(二) 電腦化適性測驗

電腦化適性測驗試題，為了提高測驗品質，也利用了檢核表來檢核試題，檢核後確定電腦化適性測驗的題目。其操作介面如下圖三、四所示，在施測的過程中，有要求受試者要在計算紙上寫下計算過程，方便事後比對：

圖三 選擇題系統測驗介面

圖四 建構題系統測驗介面

肆、研究結果

一、預試分析

依照預試測驗的結果，整理出錯誤組型跟錯誤次數，以及利用 SPSS 分析其信度如下表 6 所示，分析結果信度高達 0.95，一般的成就測驗的信度如果在 0.90 以上為優，0.80 到 0.90 之間為良好（洪碧霞，1992），因此本測驗算是信度優良的測驗。

表 6 紙筆測驗之信度

Cronbach's Alpha 值	項目的個數
.950	23

二、電腦化測驗題目分析

依照電腦化適性測驗的結果，整理出錯誤類型，以及利用 SPSS 分析其信度如下表 7 所示，分析結果信度高達 0.94，因此本測驗算是信度優良的測驗。

表 7 電腦化適性測驗題目之信度

Cronbach's Alpha 值	項目的個數
.940	23

三、錯誤類型

經由紙筆測驗的結果分析，我們發現學習者在背誦微積分公式時，會有下列不同形態的錯誤：

（一）迷思：指學習者產生（專家決定）“不該”有的錯誤關聯。如此學習者會對新公式的正確認知，發生誤導作用。

1. 錯用冪分配：學習者經辨識新公式後，認為在形式上與 $(a \otimes b)^n = a^n \otimes b^n$ 相同者。例如： $(f(g(x)))' = f'(g'(x))$ ； $(f(x)^n)' = n(f'(x))^{n-1}$ 。
2. 受加法律影響：右式直接與 $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$ 公式有關聯者。加法律亦屬於冪分配，但是它的運算是加法，而冪分配是隨左式的運算改變。例如： $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$ 。
3. 受乘法律影響：右式直接與 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 公式有關聯者，例： $(f(g(x)))' = f'g(x) + fg'(x)$ 、 $((f(g(x))) = f * g(x)$ ；將合成函數視為函數相乘）。
4. 形式錯覺：因兩者之左式之形式相同或相近，但忽略其性質不同，而關聯兩者右式者。例： $(5^3)' = 3 * 5^2$ （因誤認為多項式，即 $(x^n)' = n * x^{n-1}$ ）。

（二）迷失：（專家決定）該有的正確關聯卻沒有，所以學習者對新公式進行學習時，會因為失去適切的認知模式，而產生偏差，本錯誤常見之徵兆為運算或數字的移動。

1. 缺乏正確的運算法則：錯誤地進行結合運算。例：

- (1) $(x+1)' = x$ （錯誤： $(x+1)' = x + (1)' = x$ ）；
- (2) $(f(g(x)))' = f'(g(x))$ （錯誤：錯誤地與 f 結合）；
- (3) $\sqrt{3} - 1 = \sqrt{3-1}$ （錯誤： -1 直接與 3 結合）。

2. 忽略對稱性或交錯性：依據學習者過去學習經驗，在非基本的公式中，左式在形式有對稱性則右式亦有其對應之性質。若學習者因為忽略此學習經驗而產生誤謬者。例： $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x) + g'(x)$ （錯誤：在正確公式中 $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ 左式對稱於乘法運算，同時右式微分對稱於加法）。

3. 忽略必然性：依據學習者過去學習經驗平衡作用，在非基本的公式中，左式有的元素則右式亦有對應的元素。在符合前條件之公式，若學習者因為忽略此學習經驗而產生缺項者。

例：

(1) $(\frac{f(x)}{g(x)})' = f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$ （在學習經驗中，分母不會無端消失）；

(2) $(f(g(x)))' = f(g'(x))$ （錯誤：左式有 f 的元素在微分內，但是右式微分內只有 g ）；

(3) $h(x) = f(x)g(x)$ ， $f(3) = 4$ ， $g(3) = 2$ ， $h'(3) = 4 \cdot 2 = 8$ （左方有微分，但是右方無微分）。

（三）錯置：學習者原始公式中，有其執行之先後順序，可觀察出學習者因忽視順序，而產生錯誤的學習結果。

1. 失序（或流程不完全）：學習者執行原始公式時，步驟不完全，僅執行其中部份的項次，而將剩餘項目移除，而產生的錯誤結果，失序過度者同時亦會有「忽略必然性」的特徵。

(1) $(x^n)' = nx$ （錯誤：僅將冪次置前，並將正確之冪次移除）；

(2) $(x^n)' = n$ （錯誤：僅將冪次置前，並將 x 與正確之冪次錯誤移除）；

(3) $(x^n)' = nx^n$ （錯誤：順序最後的冪次減1未執行）；

(4) $(x^n)' = x^{n-1}$ （錯誤：只執行順序最後的冪次減1）；

(5) $(f(g(x)))' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ （錯誤：先微分 f ，其餘被錯誤移除）；

(6) $(c)' = c$ （誤用 $(cx)' = c$ ；誤用常數項可提前）。

2. 順序錯誤：學習者執行原始公式時，所有步驟均予以執行，但是順序不合。

(1) $(x^n)' = (n-1)x^{n-1}$ （錯誤：先減冪次後，再移入係數。正確應為先將冪次移入係數，再減冪次；例如 $(x^7)' = 6x^6$ ）；

(2) $(f(x)g(x))' = f'(x)g'(x) + f(x)g(x) = 23$ （錯誤：重複 copy $f(x) * g(x)$ 兩次，再執行“前微後不微”）；

(3) $(x)' = 0$ （誤用常數項可提前，即 $(c)' = 0$ 。）

3. 公式混搭：內含四則與連鎖律之混合題，原應按運算順序，逆序地一次執行一個公式，但是，卻用混搭方式產生錯誤或僅就其中一個運算的微分公式進行變形套用。（無法執行兩步以上的上流程或認為一個微分只該有一個步驟）例：

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)g(x)}{h(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{h^2(x)} ; ((f(x))^n)' = n * (f(x))^{n-1} .$$

伍、結論與建議

本研究的主要目的是根據目前大學微積分的微分部分，找出微分基本公式的錯誤類型，讓老師們在命題微積分測驗試卷時能有個參考依據，並且藉由試卷的

測驗，找出學生錯誤的觀念，再根據學生已有的知識和發生錯誤概念之原因，去進行補救，以幫助學生建立起更正確的基本知識，進而引導學生邁向更高深的學習領域。

根據專家建議，參考紙筆測驗試題變異數，其中變異數愈高，代表學生的錯誤組型種類愈多。由於無相關文獻研究此方法，為增加其可行性與可信度，於紙筆測驗後由人工閱卷方式整理試題的錯誤組型種類，發覺變異數愈高，錯誤組型也愈多，表示分析試題變異數有其參考價值。

分析了電腦化測驗的信度，其信度高達0.94，表示根據錯誤組型命題具有優良的信度，所以教師以後在教學生微分基本公式時，可以利用本研究所分析出來的錯誤類型，結合電腦化測驗，來幫助學生尋找錯誤，並且建立起正確的知識。

陸、未來研究方向

一、深入探討

目前本研究只做到「微分基本公式」的錯誤類型，對於微積分整體的知識架構來說，只不過是一小部分而已，期許對此有興趣者可更加的深入研究。

二、錯誤類型

可以針對相同的範圍命複本題，驗證錯誤類型是否齊全。

三、曝光率

根據錯誤類型多出題庫，減少題目的曝光率。

四、防猜選策略

目前本研究針對電腦化適性測驗中防猜選的方法，是利用受試者在試卷上寫出計算過程，事後互相比對；但由於人工方式太過費時，所以未來可探討更佳策略。

五、補救教學

根據錯誤類型命題，並根據測驗結果進行補救教學，評估補救教學前後學生學習程度的提升狀況。

六、貝氏網路

結合貝氏網路，建立自動化錯誤類型判讀。

參考文獻

中文部分

- 考選部 (2011)。國家考試電子計算器措施。2010 年 11 月 19 日，引自 http://wwwc.moex.gov.tw/main/content/wfrmContentLink.aspx?menu_id=162&sub_menu_id=1221
- 鄭俊彥、黃玉臺、謝俊逸、劉湘川、郭伯臣、劉育隆 (2010)。建置「微分基本公式」建構題及適性診斷系統之初探，**TWELF 2010**。
- 教育部統計處 (2010)。重要教育統計資訊。2010 年 11 月 22 日，引自 http://www.edu.tw/files/site_content/B0013/overview07.xls
- 朱美珍、余仁朋、白玉華、李家璐、王士賓、盧建良 (2009)。非選擇題型之微積分評量系統建置與其學習績效探究，行政院國家科學委員會補助專題研究計畫。

- 張玉茹、楊智為 (2009)。國小學生英語聽力電腦化測驗之編製與發展，**測驗統計年刊**，17(1)，1-22。
- 吳慧珉 (2006)。以知識結構為基礎之適性測驗選題策略強韌性探究。**測驗統計年刊**，14(2)，1-16。
- 朱美珍、白玉華 (2005)。XML在微積分網路教學上的應用。**行政院國家科學委員會專題研究計畫**。
- 陳新豐 (2005)。台灣學位電腦化測驗研究的回顧與展望。**教育研究與發展期刊**，4(3)，217-248。
- 林怡如、何信助、廖年森 (2004)。提昇數學學習動機的教學策略。**師友月刊**，440，43-47。
- 劉湘川、許天維、胡豐榮、郭伯臣 (2003)。數學科題庫建置之方法—以高職課程為例。**測驗統計簡訊**，54，8-37。
- 周倩、簡榮宏 (1997)。網路評量系統之發展與研究。**遠距教育**，4，12-15。
- 何榮桂 (1990)。電腦教學系統中的測驗設計，國立台灣師範大學中等教育輔導委員會編：中等教育（雙月刊）資訊教育專號，頁29-34，頁41(2)
- 洪碧霞 (1992)。傳統測驗理論信度的意義、類型與求法。八十一年度教學評量研習會參考資料。台灣省政府教育廳主辦，國立台南師範學院承辦。
- 呂溪木 (1983)。從國際科展看我國今後科學教育的發展方向。**科學教育月刊**，64，13-29。

英文部分

- Abdullah, S. A. S. (2010). Comprehending the Concept of Functions, *International Conference on Mathematics Education Research 2010 (ICMER 2010)*, 281-287.
- Tarmizi, R. A. (2010). Visualizing Students' Difficulties in Learning Calculus, *International Conference on Mathematics Education Research 2010 (ICMER 2010)*, 377-383.
- Erdogan, M.Ö., & Hasan, Ü. (2009). Misconception in Calculus-I: Engineering students' misconceptions in the process of finding domain of functions, *Procedia Social and Behavioral Sciences*, 1792-1796.
- Balk, N. D. (2007). *Identifying The Misconceptions And Difficulties Of Students*. England: ProQuest.
- Naidoo, K., & Naidoo, R. (2007). First year students understanding of elementary concepts in differential calculus in a computer teaching environment. *Journal of College Teaching and Learning*, 4(8), 99-114.
- Korey, J., Rheinlander, K., & Wallace, D. (2007). Open Calculus: A Free Online Learning Environment. *Journal of College Teaching & Learning*, 4(12).
- Chen, S. Y., & Lei, P. W. (2005). Controlling Item Exposure and Test Overlap in Computerized Adaptive Testing. *Applied Psychological Measurement*, 29, 204-217.
- Gruenwald, N., & Klymchuk, S. (2003). Using Counter-Examples in Teaching Calculus: Students' Attitudes, *New Zealand Mathematics Magazine*, 40(2), 33-41.
- Chi, M. T. H., & Roscoe, R. D. (2002). The process and challenges of conceptual change. In M. Limon & L. Mason (Eds.), "Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice" (pp. 3-27). Dordrecht: Kluwer.
- BAGNI, G. T. (2001). *An investigation of some misconceptions in High School students' mistakes*. ITALY: Intercollege Press Cyprus.

- Irwin, K. (1997). What conflicts help students learn about decimals?.*Proc. Inter. Conf. of Mathematics Education Research Group Australasi*, 247-254.
- Appleby, J., Samules, P., & Treasure-Jones, T. (1997). Diagnosys a knowledge-based diagnostic test of basic mathematical skills.*Computer Education*, 28(2), 113-131.
- Romberg, T. A., Zarrinia, E. A. & Williams, S. R. (1989). The Influence of Mandated Testing on Mathematics Instruction: Grade Eight Teachers' Perceptions.*National Center for Research in Mathematical Sciences Education*.
- Bell, F. H. (1978). *Teaching and Learning Mathematics (in Secondary schools)*, USA.:W.C.Brown Co. Pub.

附件一、紙筆測驗題目

一、選擇題：請將答案的選項填入括號中，並在空白處紀錄解題過程。

() 1. $(x^7)'$ =

(A) $7x^6$ (B) $6x^6$

(C) x^6 (D) $7x^7$

() 2. $(x^{-\frac{5}{2}})'$ =

(A) $-\frac{5}{2}x$ (B) $\frac{7}{2}x^{-\frac{7}{2}}$

(C) $-\frac{5}{2}x^{-\frac{5}{2}}$ (D) $-\frac{5}{2}x^{-\frac{7}{2}}$

() 3. $(x^{\sqrt{3}})'$ =

(A) $\sqrt{3}x^{\sqrt{3}}$ (B) $\sqrt{3}x^{\sqrt{3}-1}$

(C) $\sqrt{3}x^{\sqrt{2}}$ (D) $\sqrt{3}x$

() 4. $(5^3)'$ =

(A) $3 \cdot 5^2$ (B) 1

(C) 0 (D) 125

() 5. $(x)'$ =

(A) 0 (B) 1

(C) x^{-1} (D) $-x^{-1}$

二、按照例子的形式，寫出下列各題的答案。

例：

(1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

(2) 若已知 $g(x) = x^2$ ，請化簡

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm (x^2)'$

(本例子尚未化簡，但寫答案時請化成最簡)

1. $(f(x)g(x))' =$

2. 若已知 $g(x) = x^2$ ，請化簡

$(f(x)g(x))' =$

3. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

4. 若已知 $g(x) = x^2$ ，請化簡 $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$

5. $(f(g(x)))' =$

6. 若已知 $g(x) = x^2$ ，請化簡

$(f(g(x)))' =$

7. 已知 $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 均可微，

求： $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x) \cdot h(x)) =$

8. 已知 $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 均可微，求：

$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x) \cdot g(x)}{h(x)}\right) =$

三、計算題：請記錄計算過程並寫出結果，第 5、第 6 與第 7 題可以不將次方乘開化簡。

1. $\frac{d}{dx}(x^{-2} + x^2 - x^4) =$

2. $\frac{d}{dx}\left(\frac{1-x}{x+3}\right) =$

3. $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2+1}{x-2} + x^3 - x^2\right) =$

4. $\frac{d}{dx}\left(x - x^2 + (x^2 - 1)^{\frac{4}{3}}\right) =$

5. $\frac{d}{dx}(x^2 \cdot (x^2 + 1)^{10}) =$

6. $\frac{d}{dx}\left(\frac{(x^2-x)^{10}}{x^3}\right) =$

7. $\frac{d}{dx}(x^2 + 1)^{10} =$

8. 利用 $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ ，求下列式子的微

分後的結果：

(1) $\frac{d}{dx}(e^x \cdot x^2) =$

(2) $\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x \cdot x^2}{x+1}\right) =$

四、已知函數及其微分值，求 $h(x)$ 在 $x = 3$ 的微分值：

若 $f(3) = 4$ ， $g(3) = 2$ ， $f'(3) = 5$ ， $g'(3) = 3$ ，且 $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ ，則 $h'(3) =$

