

臺灣中部地區國小高年級學生幾何推理層次的 分布情形

吳德邦¹ 馬秀蘭² 陳姿良³ 許天維⁴

¹國立臺中教育大學數學教育系

²嶺東科技大學

³彰化縣埔心鄉太平國小

⁴國立臺中教育大學教育測驗暨統計研究所

摘要

本研究旨在分析臺灣中部地區高年級學生在 van Hiele 幾何推理層次的分布情形，以「吳-馬-陳氏幾何推理層次測驗」為研究工具，研究對象為臺灣中部地區 2009 年第二學期在學的國小學生五年級的學生 328 人及六年級的學生 413 人，全部樣本大小為 741 人。得到研究結果摘述如下：

A 縣和 B 市的學生均是分布在創造性層次的學生最多，其次分布在批判性層次。縣市與層次兩變項有相關，且 B 市在幾何推理層次的表現優於 A 縣，顯示在 van Hiele 幾何推理層次中，兩縣市的學生有著明顯的城鄉差異，這也代表著教育水平越高的縣市，越多學生達到較高層次，再次顯示教學和引導能提升學童的幾何思考概念，這點與 van Hiele 的理論相吻合。

五年級和六年級的學生均是分布在創造性層次的學生最多，其次分布在批判性層次。五年級、六年級的學生在 van Hiele 幾何推理的發展可能比 van Hiele 立體幾何概念的發展、van Hiele 平面幾何概念在三角形部份的發展以及 van Hiele 平面幾何概念在四邊形部份的發展都高一個層次。年級與層次兩變項沒有相關，顯示其年級愈高，分布在較高層次的人數並沒有明顯增多。

男學生和女學生均是分布在創造性層次的學生最多，其次分布在批判性層次。性別對層次兩變項沒有顯著差異。

關鍵字：小學、幾何、推理、van Hiele、思考層次

The Distributions of the van Hiele Geometrical Reasoning Level of High-Grade Elementary School Students

Der-Bang Wu¹ Tzu-Liang Chen² Hsiu-Lan Ma³ Tian-Wei Sheu⁴

¹Department of Mathematics Education, National Taichung University of Education, Taiwan

²Changhua Municipal Taiping Elementary School, Taiwan

³Ling Tung University, Taiwan

⁴Graduate Institute of Educational Measurement and Statistics, National Taichung University of Education, Taiwan

Abstract

The purpose of this study is to discuss the distributions of the van Hiele geometrical reasoning levels of 5th and 6th graders. This study uses “Wu-Ma-Chen’s van Hiele Geometric Reasoning Test” (GRT) as the research tool, choosing 741 fifth- and sixth-grade students in Central Taiwan as the subjects. The GRT was developed by the authors in 2010.

Using the Chi-Square Test to analyze the data, the conclusions were drawn as follows:

(1) Most of A county’s and B city’s students are in the creative level. In the van Hiele geometrical reasoning level, scores of students from B City are better than those from A County.

(2) Most of fifth- and sixth-grade students are in the creative level, but the number of students is not obviously higher in the higher grade.

(3) Most of male and female students are in the creative level, but in the van Hiele geometrical reasoning level, the scores of those students in the different genders are not obviously different.

Keywords : van Hiele, elementary school, thinking level, geometric reasoning

壹、緒論

一、研究動機

從許多層面分析，我們可以看出近年來推理能力愈來愈受到大家的重視。早在 1993 年教育部所公佈的國小數學課程標準中便強調：必須將數學視為推理（教育部，1993，2000）。數學是最能訓練學生推理思考和尋找規律能力的素材（吳德邦與馬秀蘭譯，2009a，2009b；馬秀蘭與吳德邦譯，2009a，2009b）。數學教育的主要目標是要發展兒童的數學推理及思考能力，使其能夠應用所學的數學知識和技能來解決在實際的生活中所遭遇的問題情境（NCTM, 1989, 2000）。NCTM 在數學課程中明定了「幾何學習解題思考的最佳問題來源」（周淑惠，1995）。教育部（2003）更在九年一貫課程綱要中，清楚的指出，幾何推理是以「已知條件」及「已知為正確的幾何性質」，推導出結論。因此小學的幾何教學，除了拓展學生的幾何直覺，在操作中，認識各種簡單幾何形體與其性質之外，更要加入簡單的推理性質與彼此之間的關係（教育部，2003）。TIMSS 2007 的數學評量架構在認知領域部份四年級和八年級都分為知道、應用與推理等三個面向，隨著年級愈高，評量推理的百分比從 20% 提高到 25%（李源順、王美娟、蘇意雯、陳怡仲，2009）。

荷蘭數學教育家 van Hiele 夫婦為提供小學及中學教師教學前瞭解學生起點行為之參考，早在 1956 年則綜合完形心理學和皮亞傑認知心理學的論點，研究個體幾何思考層次的發展，共同提出兒童幾何思考的發展層次 van Hiele 模式（van Hiele, 1986），此模式亦與皮亞傑對七至十二歲具體運思期兒童的認知發展論點相合（吳德邦，1999；譚寧君，1993）。

我國在 2000 年的九年一貫課程，在幾何教材的發展順序，即是以 van Hiele 理論為主軸，因此，van Hiele 在幾何課程中佔有一席之地。根據吳德邦（1998）指出其層次分為（1）視覺的（visual）；（2）描述的（descriptive）；（3）理論的（theoretical）；（4）形式邏輯的（formal logic）；（5）邏輯法則本質的（the nature of logical laws）（吳德邦，1999，2000，2004；吳德邦、馬秀蘭與李懿芳，2007；吳德邦、陳姿良、馬秀蘭、紀小玉，2009；吳德邦、馬秀蘭、陳姿良、許天維，2010）。

推理思考活動是一種尋求因果關係的心理歷程。Coles 和 Robinson（1989）認為推理思考是一種同時具備批判性思考和創造性思考的思考模式。而 Krulik & Rudnick（1993, 1999）則表示推理是思考的一部分，並指出推理是思考的歷程中，高於回憶（recall）的層次，分為三個層次，從較低層次的基本的（basic）思考，到較高層次的批判性（critical）思考、創造性（creative）思考。而數學是最能訓練學生推理思考和尋找規律能力的素材（吳德邦與馬秀蘭譯，2009a，2009b；馬秀蘭與吳德邦譯，2009a，2009b）。本研究所提及的 van Hiele 幾何推理層次，係綜合 Coles & Robinson（1989）和 Krulik & Rudnick（1993, 1999）有關推理的內涵，以其思考層次的關係與層次，並配合 van Hiele 幾何思考層次理論、Fuys 等

人(1988)提出針對 van Hiele 幾何思考層次的描述發展而來，分為批判性層次和創造性層次。

基於以上論述，研究者深覺幾何推理在國小數學領域中的重要性，但由於大部分中、高年級生對基本幾何圖形概念能達層次二，但只有高年級生能達層次三(Wu & Ma, 2006, 2009, 2010, 2011)。因此本研究以國小五、六年級學生為研究對象，採用問卷調查，以吳德邦、馬秀蘭、陳姿良在 2009 年所發展出來的「吳-馬-陳氏幾何推理層次測驗」為研究工具，分析不同縣市、年級、性別之國小學生在幾何推理層次的分布情形及其卡方檢定，提供國小教師課程計畫實施之參考。礙於篇幅的因素，本文僅呈現推論性統計的部分，有關於學生在測驗答題情形之敘述性統計的部分則另闢文討論之。

二、研究目的

根據上述研究動機，本研究的研究目的為分析不同縣市、年級、性別之國小學生在幾何推理層次的分布情形及其卡方檢定。

三、名詞定義

(一) 中部地區

係指臺灣中部地區，而為顧及研究倫理，因此以 A 縣、B 市之代號定義之。此二縣市之相關人文背景的描述如下：

A 縣：土地面積約為 1074 平方公里，以平地面積最大，農業最為發達，目前總人口數約為 131.2 萬人。

B 市：土地面積約為 163.4 平方公里，為盆地地形，以工商產業結構為主，是中臺灣經濟、交通、文化的重鎮，目前總人口數約為 107.4 萬人。

(二) van Hiele 幾何推理層次

本研究所提及的 van Hiele 幾何推理層次，係綜合 Coles & Robinson (1989) 和 Krulik & Rudnick (1993, 1999) 有關推理的內涵，以其思考層次的關係與層次，並配合 van Hiele 幾何思考層次理論、Fuys 等人 (1988) 提出針對 van Hiele 幾何思考層次的描述發展而來，分為批判性層次和創造性層次。

貳、文獻探討

一、van Hiele 幾何思考層次理論

實際從事教育工作的荷蘭數學教育家 van Hiele 夫婦歷經多年的努力，終於在 1957 年發展出了幾何思考層次理論。他們根據完形心理學的結構論以及皮亞傑的認知發展理論 (Molina, 1990; van Hiele, 1986)，提出兒童幾何思考層次，主要認為幾何的思考有著一定的發展層次，透過教師或引導者適當的引導，兒童可以從較低的層次逐步提升到較高的思考層次，並且要等到前一個層次充分發展之後，才可能晉升到下一層次 (Senk,

1989)。

對於這五個層次的描述方式，本研究採用 van Hiele (1986) 對層次的說法，分別為視覺的層次、描述的層次、理論的層次、形式邏輯的層次、邏輯本質法則的層次。以下分別就各層次的內容簡單描述 (吳德邦、馬秀蘭與藍同利，2006a、2006b；陳進春與吳德邦，2005)：

(一) 層次一：視覺的 (visual) 層次

此層次的兒童可以透過視覺觀察辨認各種具體物的外形輪廓，例如：從生活經驗中可得知像窗戶的形狀為長方形。但此階段的兒童，他們無法了解這些圖形的真正定義，因此還不能根據圖形的組成要素或性質來進行分析。

(二) 層次二：描述的 (descriptive) 層次

兒童不但具有辨別圖形特徵的能力，且能依據所觀察到的結果，分析圖形的基本要素及這些圖形之間的關係。例如：他們能夠知道長方形的角都是直角或三角形的內角和是 180° 等圖形特徵，但在此層次還不能夠過推理來了解圖形特徵之間有什麼關係存在。

(三) 層次三：理論的 (theoretical) 層次

這個層次的學生，不但清楚各種圖形的構成要素，並且知道各種圖形之間的包含關係以及各種幾何圖形的內在屬性。例如：長方形有兩雙平行且相等的對邊，而菱形是長方形的一種，當長方形四個邊都相等時，這個四邊形就是菱形。學生能夠將先前發現的性質整理成公式或使用圖形的定義進行非正式的推理，但是還不能進行有系統的證明。

(四) 層次四：形式邏輯的 (formal logic) 層次

這個層次的學生能夠經由抽象推理的過程，來證明幾何問題及相互間的關係，也能夠理解幾何問題要解決，必須具備的充分或必要條件，並使用邏輯推理的方法，來證明幾何的性質。

(五) 層次五：邏輯本質法則的 (the nature of logical laws) 層次

這個層次是屬於最高層次，達到這個層次的學生，能學習不同的幾何公設系統，例如：歐氏幾何與非歐氏幾何的比較。在不同的公設體系中，建立定理並且分析或比較各種不同的公設系統。

根據 Crowley (1987) 對 van Hiele 幾何思考層次提出了五個特性，分別為次序性、提升性、內因性與外因性、語言性、以及不配合性。各項特性分述如下：

(一) 次序性 (sequential)

學生必須充分的學習所在層次的各種概念，才能順利進到下一個層次的學習。因為幾何思考層次的發展是循序漸進的，每一個層次的概念都是來自於前一個層次的概念。

(二) 提升性 (advancement)

van Hiele (1986) 曾經提到，教師適當的教學和引導能提升學生的幾

何思考概念，但是沒有一種教學方法能使學生跳過某一層次，直接進入到下一個層次。

（三）內因性與外因性（intrinsic and extrinsic）

在某一層次的性質是屬於內在的性質，到了下一個層次，有可能成為外顯的性質。Clements & Battista（1992）也指出，某些概念在目前這個層次可能不明顯，但在下個層次是明確可知的。

（四）語言性（linguistics）

正方形也可以說是長方形，又可說是平行四邊形，這個概念在第二層次的學生可能無法理解，但等到了第三層次，學生可能就能理解其關連性。也就是說，在每一個層次中，都有屬於該層次自己獨特的語言、符號，以及這些符號之間的關聯系統。

（五）不配合性（mismatch）

依據 van Hiele 幾何思考層次的語言獨特性，每個層次有它自己獨特的語言、符號，若是屬於不同層次的人，彼此間不能相互的溝通、了解。

二、認知發展理論

瑞士心理學家皮亞傑（Piaget）提出兒童認知發展的階段性理論，把兒童從出生到青年初期的認知發展歷程分成感覺動作階段、前運思階段、具體運思階段、形式運思階段。

其中兒童在 7 歲到 12 歲的時候屬於具體運思階段，在此階段兒童的不但已有質量、容積等保留概念和可逆性的概念，且能排列次序，能進行物的分類、比較以了解其間的關係，並能透過具體物進行簡單的邏輯運算及邏輯推理。12 歲到 15 歲的青少年屬於形式運思階段，這個階段的青少年具有根據假設進行演繹推理的能力，對問題的解答能做出論證，能夠對抽象的問題運用概念的、系統的、邏輯的方式進行推理。從皮亞傑的認知發展階段性理論來看，本研究的所有受測學生應該都能夠根據題目的假設進行非形式的推理，足以回答本研究的測驗題目。

至於兒童幾何認知概念的形成，皮亞傑等（Piaget, Inhelder, & Szeminska, 1960）認為隨著年齡的成長對於空間知覺的發展可分為拓樸性（topological）、投影性（projective）、歐幾里得性（Euclidean）三個階段。在歐幾里得性幾何概念階段的兒童對於這些幾何形體具有長度及距離保留概念，面積保留概念大約也在此階段發展完成。根據皮亞傑的說法，在小學低年級時，兒童的圖形概念大部分都已發展到歐幾里得幾何概念階段。因此本研究的受測學生，應都已具備線段長短、角度大小及面積大小的概念（洪明賢，2003）。

三、推理思考層次

推理與思考有什麼關係？其實早在 1964 年，Angell（1964）就表示推理是

一種動態的人類活動，它是我們的一種心理活動（思考），這種活動包含解決問題、想出某些事；它有四項特徵：1.推理一個是有目的的過程；2.要採取何種推理方式會依據推理目標而決定；3.推理屬於個人的活動；4.推理是一種心智的及內心的活動。張春興（1991）也曾提出，推理其間經過的心理活動，就是思考，思考和推理歷程是有關的（張春興，1992）。英國牛津技巧之教學計畫（Coles & Robinson, 1989）則把思考定義為個體從事解決問題時的心智活動，並以促進兒童的思考能力為其計畫的目的。

在 Gardner（1983）對人類能力的研究中，提出了多元智慧論，每一種都是人類用來學習、解決問題以及創造的工具，其中他認為人類的能力應可包括邏輯—數學智慧（logical-mathematical intelligence），也就是能有效地運用邏輯和推理的能力，例如：數學計算、邏輯思考、問題解決、歸納及演繹推理、及辨別型組和關係（引自馬秀蘭，2007）。Gardner 並認為「邏輯—數學智慧」的發展與 Piaget 所提出的認知發展階段與方面一致。Klenk 則指出邏輯就是要研究推理（引自劉福增譯，1997）。Campell 和 Martin（1995）更進一步提出，用於邏輯—數學智慧各種步驟包括分類、分等、推論、概括、計算和假設檢定。

英國牛津技巧之教學計畫（Coles & Robinson, 1989）表示思考的內涵包括批判思考、創造思考、推理思考和問題解決。Coles 和 Robinson（1989）認為推理思考是一種同時具備批判性思考和創造性思考的思考模式，兩者都屬於推理思考，其關係如圖 1 所示。而 Krulik & Rudnick（1993, 1999）和 Wu & Ma（2009, 2010, 2011）均表示推理是思考的一部分，並指出推理是思考的歷程中，高於回憶（recall）的層次，分為三個層次，從較低層次的基本的（basic）思考，到較高層次的批判性（critical）思考、創造性（creative）思考，以下以圖 2 說明推理的思考層次，因思考可能經常在各層次之間來回移動，因而各層次並不是完全分離的，每一個層次的思考技能都會外延的，運用到下面層次的技能。張玉成（1998）同樣認為推理思考是介於認知記憶和高層次思考技巧之間，而其主要內涵有理解、應用及分析等三項能力。Sternberg（1997）認為，數學推理不僅要分析思考，還要創造性思考。創造性問題解決的研究者也認為完整的問題解決思考過程不只是運用推理性思考，也必須並用批判性思考與創造性思考（洪文東，2000；Treffinger & Isaksen, 1992）。

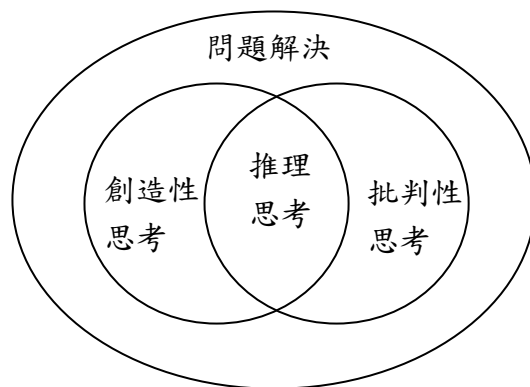


圖 1 推理與批判性和創造性思考之關係（引自馬秀蘭，2007，頁 389）

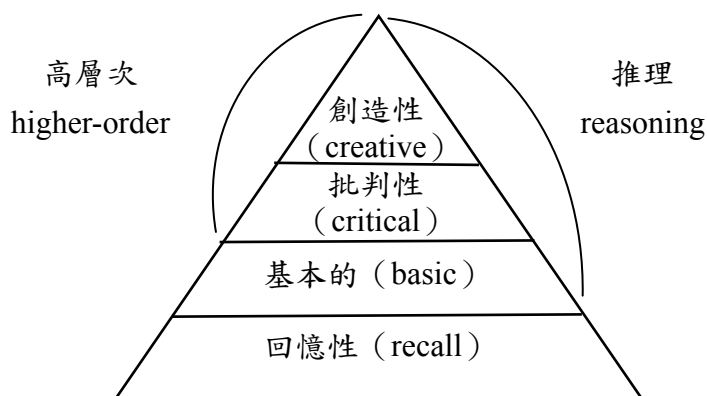


圖 2 思考層次的階級圖（引自馬秀蘭與吳德邦譯，2009b，頁 3）

Krulik & Rudnick (1993, 1999) 認為基本的思考包括對於數學概念的理解以及應用，例如：除了能運用加法、減法、乘法和除法這些運算來解決問題，還要能夠進一步運用在解決學校或日常生活問題中。一般認為，學生的數學經驗以真實情境所給予的真實資料最有價值 (Burrill & Romberg, 1998; Garfield & Gal, 1999)，因為它提供一個機會使學生有機會讓自己扮演數學問題解決的主角，讓他們可以在真實世界裡從事用數學來解決問題 (Greer, 2000; Moore, 1998)。

其中批判性思考屬於分析性質，指在遭遇到問題或情境時能夠審查、欣賞或評估。換句話說，就是能聚焦在一個問題，進而搜集、組織和分析資訊，檢核、連結和評鑑某一情境或問題的各個面向，然後結合先前已學過的經驗，決定出最合理的答案以及有效結論的思考 (吳德邦與馬秀蘭譯，2009b；馬秀蘭與吳德邦譯，2009b；Coles & Robinson, 1989; Krulik & Rudnick, 1993, 1999)。此外，在有關批判性思考中，Gartenhaus (1984) 認為它應包含分析、連結、評鑑；毛連塏、吳清山、陳麗華 (1992) 則提到「康乃爾批判思考測驗」(X 級) 定義此能力應包括歸納、考察可信度、演繹與確定假設。張玉成 (1998) 歸納國外學者對批判思考的定義，將其分為檢視、比較、判斷、歸納和選擇五個思考過程，並認為批判性思考相近於收斂性和評鑑性運作。

創造性思考則偏重發散歧異性，它是指一個想法，具有原創性和有效性、擅於發明、能產生精緻複雜的思考方式。具有創造性思考的人，能綜合其想法、產生創意，以及能應用概念以解決問題 (吳德邦與馬秀蘭譯，2009b；馬秀蘭與吳德邦譯，2009b；Coles & Robinson, 1989; Krulik & Rudnick, 1993, 1999)。張玉成 (1998) 也認為創造性思考接近發散性運作。除此之外，有關創造性思考學者有眾多的看法，但內容皆大同小異，大部分主張流暢性、變通性、獨創性、精進性、敏覺性五種能力為主 (陳龍安，1998；賈馥茗，1976；Guilford, 1977; Torrance & Orlow, 1986)。美國創造力學家 Osborn 甚至把創造力比喻為潛在人類腦中的金礦，最為珍貴。

馬秀蘭 (2007) 研究中驗證了 Krulik & Rudnick (1993, 1999) 的觀點，每個層次之思考並非分離，而且每個層次是外延的使用到其層次下之技能，因而相鄰

層次間有來動的交集存在。為了表示基本的、批判性和創造性思考的領域大小、各自獨立、互相含涉以及層次的階級，她修正了 Krulik & Rudnick (1993) 思考層次的階級圖，將彼此間之關係表示如圖 3，圖中「基本的思考」的範圍較大，表示學生思考過程大多進行「基本的思考」。

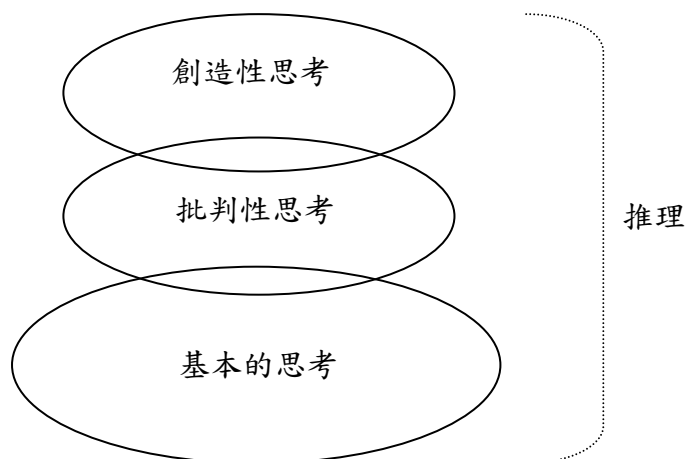


圖 3 思考層次的階級圖 (馬秀蘭, 2007b, 頁 408)

總而言之，國內外學者對推理思考的內容及其涉及的主張雖然略有不同，但大部分學者皆認為高層次的推理思考包含批判性思考以及創造性思考。因此研究者綜合 Coles & Robinson (1989) 和 Krulik & Rudnick (1993, 1999) 有關推理的內涵，以其思考層次的關係與層次，並配合 van Hiele 幾何思考層次理論、Fuys 等人 (1988) 提出針對 van Hiele 幾何思考層次的描述，做為本研究的理論基礎。

參、研究工具及對象

一、研究工具

本研究採用研究者在2009年（2009年年初）自編的「吳-馬-陳氏van Hiele幾何推理層次測驗」，以分析不同縣市、年級、性別之國小學生在幾何推理層次的分布情形及其卡方檢定。就劉好（1993）針對國小的教材分析，說明我國的幾何課程高年級教材屬van Hiele幾何思考層次中第三個層次（理論的層次）。由於研究對象是以國小高學生為主，故此測驗編製範圍僅針對van Hiele幾何思考層次第三個層次，測驗內容更進一步細分為二個層次，分別為批判性層次和創造性層次。本測驗題目為32題，施測時間為40分鐘，每題皆為單選題，答對一題得一分，共計32分。批判性層次的題目一共18題，創造性層次的題目一共14題。幾何類型分為平面幾何、立體幾何和包含關係，平面幾何的題目一共17題，立體幾何的題目一共10題，包含關係的題目一共5題（吳德邦、陳姿良、馬秀蘭、紀小玉，2009；吳德邦、馬秀蘭、陳姿良、許天維，2010）。詳細內容請參見表1。

表 1 吳-馬-陳氏 van Hiele 幾何推理層次測驗之雙向細目表

van Hiele 幾何推理層次	幾何類型	相關概念	題號
批判性層次	平面	四邊形內角和的概念推理	1
		三角形內角和的概念推理	7
		一條對角線的推理	12
		二條對角線的推理	16
		外角的辨認推理	15
		四邊形辨認的推理	2、5
		三角形辨認的推理	4
		利用三角形內角和算出未知的角 度推理	6
		平行四邊形的角度推理	13
		梯形的角度推理	14
		圖形的組合推理	10
		圖形的分割推理	11
		三角形的邊長推理出周長	3
		菱形的邊長推理出周長	8
批判性層次	立體	方位的推理	9
		推理出性質不同的立體圖形	18
		線對稱圖形的推理	17
創造性層次	平面	由已知性質推理出正確圖形	19、24
創造性層次	立體	立體圖形的推理	30
		積木的個數推理（選項為數字）	23、26
		積木的個數推理（選項為圖片）	31
		圓錐橫切的切面推理	28
		三角柱直切的切面推理	29
		圓柱斜切的切面判斷	32
創造性層次	包含關係	直角三角形、正三角形以及鈍角 三角形的包含關係推理	22
		等腰三角形、正三角形以及銳角 三角形的包含關係推理	25
		正方形、長方形以及平行四邊形 的包含關係推理	20
		長方形、菱形、梯形以及平行四 邊形的包含關係推理	21
		正方體、角柱以及四角柱的包含 關係推理	27

（引自吳德邦、馬秀蘭、陳姿良、許天維，2010，頁299）

根據多位學者指出批判性思考屬於分析性質，指能聚焦在一個問題，進而搜集、組織和分析資訊，檢核、連結和評鑑某一情境或問題的各個面向，然後結合

先前已學過的經驗，決定出最合理的答案（吳德邦與馬秀蘭譯，2009b；馬秀蘭與吳德邦譯，2009b；Coles & Robinson, 1989; Krulik & Rudnick, 1993, 1999），研究者根據此論點，將具備這些特性的題目歸為批判性層次，以下列舉第 6 題詳細說明。

分析圖 4 的第 6 題題目，要答對這一題，學生只需知道三角形的內角和為 180 度，再運用減法運算即可得到答案，因此將這一題歸為批判性層次。

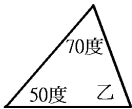
() 6.右圖中的角乙是幾度？ (1) 50 度 (2) 60 度 (3) 70 度 (4) 240 度	
--	---

圖 4 第 6 題題目

而多位學者也指出創造性思考是指一個想法，具有原創性，能綜合其想法，以及能應用概念以解決問題（吳德邦與馬秀蘭譯，2009b；馬秀蘭與吳德邦譯，2009b；Coles & Robinson, 1989; Krulik & Rudnick, 1993, 1999），同樣的，研究者根據此論點，將具備這些特性的題目歸為創造性層次，以下列舉第 19 題詳細說明。

分析圖 5 的第 19 題題目，要答對這一題，學生需綜合「三個角」、「其中有一個角是 90 度」、「二條邊等長」等訊息，才能得到答案，因此將這一題歸為創造性層次。

() 19.有一個圖形，它有三個角，其中有一個角是 90 度，且二條邊等長，請問它可能是什麼圖形？ (1) 正方形 (2) 等腰直角三角形 (3) 正三角形 (4) 鈍角三角形
--

圖 5 第 19 題題目

此測驗的Cronbach's α 值為0.843顯示此份工具的信度相當高。批判性層次的分量Cronbach's α 值為0.794，創造性層次的分量Cronbach's α 值為0.719。效度是採用專家效度（引自吳德邦、馬秀蘭、陳姿良、許天維，2010）。

二、研究對象

本研究的母群體主要是以臺灣中部地區2009年第二學期（2009年年尾）在學的國小學生為主，其中並不包含私立國小、特殊學校以及特殊班級的學生。由於經費限制，施測的對象選取鄰近學校五年級的學生328人及六年級的學生413人，全部樣本大小為741人。其分配表如表2所示：

表 2 施測樣本分配表

縣市別 \ 年級	五年級			六年級			總計
	男	女	小計	男	女	小計	
A 縣	69	63	132	71	74	145	277
B 市	93	103	196	137	131	268	464
總計	162	166	328	208	205	413	741

肆、研究結果與討論

一、不同縣市、年級、性別之國小學生在幾何推理層次的分布情形及其卡方檢定

(一) 探討不同縣市的學生與層次之間的關係

本研究批判性層次的試題有18題，創造性層次則有14題，而依據Usiskin (1982) 提出在評量van Hiele幾何思考層次的基準中，每一層次各出五個題目，以某一層次的答對題數超過該層次全部題數的五分之三或五分之四以上時，作為達到此一層次的標準。因此，本研究乃根據Usiskin (1982) 提出之標準，以通過測驗題目的五分之三以上為通過該層次之標準（至於五分之四的部分成果與結論，則另闢文討論之），分析臺灣中部地區國小五、六年級學生在幾何推理能力發展之情形。

先以SPSS 12.0版軟體來計算各縣市各層次的人數和百分比，各層次分布情形詳如表3。

表 3 不同縣市的學生在幾何推理層次的分布情形

幾何推理層次		未達批判性 層次	批判性 層次	創造性 層次	跳躍 現象	總計
A 縣	人數	57	91	127	2	277
	(%)	20.6	32.9	45.8	0.7	100
B 市	人數	64	106	285	9	464
	(%)	13.8	22.8	61.4	1.9	100
總計	人數	121	197	412	11	741
	(%)	16.3	26.6	55.6	1.5	100

註：本研究中的跳躍現象指學生未達到批判性層次卻達到創造性層次。

本份測驗的結果，在741人中，分布在van Hiele幾何推理層次中創造性層次的學生最多，佔全體人數的55.6%，其次分布在批判性層次，佔全體人數的26.6%，再者為分布在未達批判性層次，佔全體人數的16.3%，最後為跳躍現象，佔全體人數的1.5%。

A縣的學生中，分布在創造性層次的學生最多，佔所有A縣學生的45.8%，其

次分布在批判性層次，佔所有A縣學生的32.9%。B市的學生中，仍是分布在創造性層次的學生最多，佔所有B市學生的61.4%，其次仍是分布在批判性層次，佔所有B市學生的22.8%。

接著，採用卡方之獨立性考驗來檢測學生的van Hiele幾何推理層次的隸屬情形與縣市之間是否具有差異情形，檢測結果如表4。

表4 不同縣市的學生在各個隸屬層次之卡方考驗

		縣市		卡方值
		A縣	B市	
未達批判層次	個數	57	64	20.722***
	期望個數	45.2	75.8	
	層次內的%	47.1%	52.9%	
	學生縣市內的%	20.6%	13.8%	
批判性層次	個數	91	106	
	期望個數	73.6	123.4	
	層次內的%	46.2%	53.8%	
	學生縣市內的%	32.9%	22.8%	
創造性層次	個數	127	285	
	期望個數	154.0	258.0	
	層次內的%	30.8%	69.2%	
	學生縣市內的%	45.8%	61.4%	
跳躍現象	個數	2	9	
	期望個數	4.1	6.9	
	層次內的%	18.2%	81.8%	
	學生縣市內的%	7%	1.9%	

註：本研究中的跳躍現象指學生未達到批判性層次卻達到創造性層次。

*** $P < .001$

根據表4所示，在創造性層次的部分，B市（61.4%）的人數百分比優於A縣（45.8%），表示有較多的學童達到推理層次較高的創造性層次；而推理層次較低的批判性層次、未達批判性層次，B市的人數百分比均低於A縣，且縣市與層次兩變項所構成的列聯表以卡方檢驗分析的結果發現 $\chi^2=20.722$ （ $p < .001$ ），達顯著水準，表示縣市與層次兩變項有相關，且B市在幾何推理層次的人數百分比優於A縣。顯示在van Hiele幾何推理層次中，兩縣市的學生有著明顯的城鄉差異，這也代表著教育水平越高的縣市，越多學生達到較高層次，再次顯示教學和引導能提升學童的幾何思考概念，這點與van Hiele的理論相吻合。

（二）探討不同年級的學生與層次之間的關係

先以SPSS 12.0版軟體來計算各年級各層次的人數和百分比，各層次分布情

形詳如表5。

表 5 不同年級的學生在幾何推理層次的分布情形

幾何推理層次		未達批判 性層次	批判性 層次	創造性 層次	跳躍 現象	總計
五年級	人數	64	88	169	7	328
	(%)	19.5	26.8	51.5	2.1	100
六年級	人數	57	109	243	4	413
	(%)	13.8	26.4	58.8	1.0	100
總計	人數	121	197	412	11	741
	(%)	16.3	26.6	55.6	1.5	100

註：本研究中的跳躍現象指學生未達到批判性層次卻達到創造性層次。

五年級的學生中，分布在創造性層次的學生最多，佔所有五年級學生的51.5%，其次分布在批判性層次，佔所有五年級學生的26.8%。六年級的學生中，仍是分布在創造性層次的學生最多，佔所有六年級學生的58.8%，其次仍是分布在批判性層次，佔所有六年級學生的26.4%。

六年級的學生在創造性層次的人數百分比比較五年級的學生高，而五年級的學生在批判性層次、未達批判性層次的人數百分比均較六年級的學生高。顯示年級越高，達到較高層次的學生比例也越高。五年級的學生達到批判性層次和創造性層次的學生一共有78.35%，也就是有78.35%的學生達到van Hiele幾何思考層次三，與Wu和Ma（2006）有關van Hiele平面幾何的研究比較，在三角形的概念中，五年級的學童多分布在van Hiele平面幾何思考層次二（51.3%），在四邊形的概念中，五年級的學童多分布在van Hiele平面幾何思考層次二（60.9%）。再與吳德邦、李懿芳、馬秀蘭（2006）、吳德邦、馬秀蘭與李懿芳（2007）有關立體幾何的研究比較，五年級的學生多分布在van Hiele立體幾何思考層次二。由上述可推測，五年級學生在van Hiele幾何推理的發展可能比van Hiele 立體幾何概念的發展、van Hiele平面幾何概念在三角形部份的發展以及van Hiele平面幾何概念在四邊形部份的發展都高一個層次。

六年級的學生達到批判性層次和創造性層次的學生一共有85.23%，也就是有85.23%的學生達到van Hiele幾何思考層次三，與Wu和Ma（2006）有關van Hiele平面幾何的研究比較，在三角形的概念中，六年級的學童多分布在van Hiele平面幾何思考層次二（53.9%），在四邊形的概念中，六年級的學童多分布在van Hiele平面幾何思考層次二（67.9%）。再與吳德邦、李懿芳、馬秀蘭（2006）、吳德邦、馬秀蘭與李懿芳（2007）有關立體幾何的研究比較，六年級的學生多分布在van Hiele立體幾何思考層次二（52.2%）。由上述可推測，六年級學生在van Hiele幾何推理的發展可能比van Hiele 立體幾何概念的發展、van Hiele平面幾何概念在三角形部份的發展以及van Hiele平面幾何概念在四邊形部份的發展都高一個層次。

接著，採用卡方之獨立性考驗來檢測學生的van Hiele幾何推理層次的隸屬情形與年級之間是否具有差異情形，檢測結果如表6。

表6 不同年級的學生在各個隸屬層次之卡方考驗

		年級		卡方值
		五年級	六年級	
未達批判層次	個數	64	57	7.069
	期望個數	53.6	67.4	
	層次內的%	52.9%	47.1%	
	學生縣市內的%	19.5%	13.8%	
批判性層次	個數	88	109	
	期望個數	87.2	109.8	
	層次內的%	44.7%	55.3%	
	學生縣市內的%	26.8%	26.4%	
創造性層次	個數	169	243	
	期望個數	182.4	229.6	
	層次內的%	41.0%	59.0%	
	學生縣市內的%	51.5%	58.8%	
跳躍現象	個數	7	4	
	期望個數	4.9	6.1	
	層次內的%	63.6%	36.4%	
	學生縣市內的%	2.1%	1.0%	

註：本研究中的跳躍現象指學生未達到批判性層次卻達到創造性層次。

根據表6所示，年級與層次兩變項所構成的列聯表以卡方檢驗分析的結果發現 $\chi^2=.069$ （ $p=.069 > .05$ ），未達顯著水準，表示年級與層次兩變項沒有相關，顯示其年級愈高，分布在較高層次的人數並沒有明顯增多。

（三）探討不同性別的學生與層次之間的關係

先以SPSS 12.0版軟體來計算不同性別各層次的人數和百分比，各層次分布情形詳如表7。

表7 不同性別的學生在幾何推理層次的分布情形

幾何推理層次		未達批判性 層次	批判性 層次	創造性 層次	跳躍 現象	總計
男生	人數	66	98	202	4	370
	(%)	17.8	26.5	54.6	1.1	100
女生	人數	55	99	210	7	371

表 7 不同性別的學生在幾何推理層次的分布情形 (續)

	(%)	14.8	26.7	56.6	1.9	100
總計	人數	121	197	412	11	741
	(%)	16.3	26.6	55.6	1.5	100

註：本研究中的跳躍現象指學生未達到批判性層次卻達到創造性層次。

男學生中，分布在創造性層次的學生最多，佔所有男學生的54.6%，其次分布在批判性層次，佔所有男學生的26.5%。女學生中，仍是分布在創造性層次的學生最多，佔所有女學生的56.6%，其次仍是分布在批判性層次，佔所有女學生的26.7%。女學生在批判性層次、創造性層次的人數百分比比較男學生高，而男學生在、未達批判性層次的人數百分比比較女學生高。

接著，採用卡方之獨立性考驗來檢測學生的van Hiele幾何推理層次的隸屬情形與性別之間是否具有差異情形，檢測結果如表8。

表8 不同性別的學生在各個隸屬層次之卡方考驗

		性別		卡方值
		男	女	
未達批判層次	個數	66	55	1.977
	期望個數	60.4	60.6	
	層次內的%	54.5%	45.5%	
	學生縣市內的%	17.8%	14.8%	
批判性層次	個數	98	99	
	期望個數	98.4	98.6	
	層次內的%	49.7%	50.3%	
	學生縣市內的%	26.5%	26.7%	
創造性層次	個數	202	210	
	期望個數	205.7	206.3	
	層次內的%	49.0%	51.0%	
	學生縣市內的%	54.6%	56.6%	
跳躍現象	個數	4	7	
	期望個數	5.5	5.5	
	層次內的%	36.4%	63.6%	
	學生縣市內的%	1.1%	1.9%	

註：本研究中的跳躍現象指學生未達到批判性層次卻達到創造性層次。

根據表 8 所示，性別與層次兩變項所構成的列聯表以卡方檢驗分析的結果發現 $\chi^2=1.977$ ($p=.577 > .05$)，未達顯著水準，表示性別與層次兩變項沒有相

關。

肆、結論與建議

一、結論

A縣的學生中，分布在創造性層次的學生最多，其次分布在批判性層次。B市的學生中，仍是分布在創造性層次的學生最多，其次仍是分布在批判性層次。縣市與層次兩變項所構成的列聯表以卡方檢驗分析的結果達顯著水準，表示縣市與層次兩變項有相關，且B市在幾何推理層次的表現優於A縣，顯示在van Hiele幾何推理層次中，兩縣市的學生有著明顯的城鄉差異，這也代表著教育水平越高的縣市，越多學生達到較高層次，再次顯示教學和引導能提升學童的幾何思考概念，這點與van Hiele的理論相吻合。

五年級的學生中，分布在創造性層次的學生最多，其次分布在批判性層次。六年級的學生中，仍是分布在創造性層次的學生最多，其次仍是分布在批判性層次。五年級、六年級的學生在van Hiele幾何推理的發展可能比van Hiele 立體幾何概念的發展、van Hiele平面幾何概念在三角形部份的發展以及van Hiele平面幾何概念在四邊形部份的發展都高一個層次。年級與層次兩變項所構成的列聯表以卡方檢驗分析的結果未達顯著水準，表示年級與層次兩變項沒有相關，顯示其年級愈高，分布在較高層次的人數並沒有明顯增多。

男學生中，分布在創造性層次的學生最多，其次分布在批判性層次。女學生中，仍是分布在創造性層次的學生最多，其次仍是分布在批判性層次。性別與層次兩變項所構成的列聯表以卡方檢驗分析的結果未達顯著水準，表示性別對層次兩變項沒有顯著差異。

二、建議

本研究中發現，在van Hiele幾何推理層次中，兩縣市的學生有著明顯的城鄉差異。因此建議教育資源較缺乏的縣市或學校，教師在教學時，同一概念的教授可結合各領域教學，或者搭配多媒體，增加舉例、實作的次數，以加深加廣學生的學習。

本研究僅使用古典測驗理論來分析GRT測驗工具，建議未來使用改良的模糊測度(Liu, Chen, Chen, Jheng, & Wu, 2011; Wu, 2010)或灰色理論(Wu & Ma, 2009, 2010, 2011)進一步的分析。此外，本研究僅針對臺灣中部地區來做研究，未來的研究者可擴大樣本選取的範圍，以了解其他地區的國小學生是否有和中部地區學生一致的表現。研究者以鄰近學校做為研究樣本，建議未來的研究者可採隨機抽樣，增加研究的外在效度，使研究結果能做普遍的推論。

致謝

本文係「行政院國家科學委員會科學教育處」補助專題研究計畫之部分研究成果(計畫名稱：結合L-測度與Delta-測度之型II複合模糊測度之理論與應用－以提昇幾何推理能力為例，計畫編號：NSC99-2511-S-142-008，計畫主持人：吳

德邦)，特此申謝！文中論述均屬主持人暨其研究團隊、作者們的意見，不代表「國家科學委員會」的立場。

參考文獻

- 毛連塏、吳清山與陳麗華（1992）。康乃爾批判思考測驗修訂報告。**初等教育學刊**，1，11-28。
- 吳德邦（1998）。臺灣中部地區國小學童 van Hiele 幾何思考層次之研究。載於行政院國家科學委員會（編印），八十六年度數學教育專題研究計畫成果討論會摘要（47-64）。臺北市：中華民國行政院國家科學委員會。
- 吳德邦（1999）。簡介范析理幾何思考理論。國立臺中師範學院進修暨推廣部，**進修學訊年刊**，5，47-86。
- 吳德邦（2000）。臺灣中部地區國小學童 van Hiele 幾何思考層次之研究—晤談部份，**進修學訊年刊**，6，11-32。
- 吳德邦（2004，10月）。van Hiele 的近況及其理論的簡介。**國教輔導月刊**，44（1），21-25。
- 吳德邦、李懿芳與馬秀蘭（2006）。立體幾何思考層次測驗編製歷程之研究。載於吳德邦（主編），**數學考卷編製暨評析研討會論文集**（584-608）。臺中市：國立臺中教育大學數學教育學系。
- 吳德邦、馬秀蘭與李懿芳（2007）。編製吳-馬-李氏 van Hiele 立體幾何思考層次測驗之歷程。**測驗統計年刊**，15（2），16-42。
- 吳德邦、馬秀蘭與藍同利（2006a）：小青的三角形概念—從 Duval 理論的觀點探究一位國小五年級視覺型兒童之個案研究。**科學教育研究與發展季刊**，42，78-116。
- 吳德邦、馬秀蘭與藍同利（2006b）：探究國小視覺型與觸覺型兒童在繪製三角形活動之概念分析。**台中教育大學學報**（ISSN: 1817-6437），20（2），99-138。
- 吳德邦、馬秀蘭、陳姿良與許天維（2010）。編製吳-馬-陳氏 van Hiele 幾何推理測驗之歷程。**2010 第二屆科技與數學教育學術研討會論文集**（pp. 291-304）。臺中市：國立臺中教育大學數學教育學系。
- 吳德邦、陳姿良、馬秀蘭與紀小玉（2009）。九年一貫課程實施中國小學童在幾何圖形概念上之理解情形。**第一屆科技與數學教育學術研討會論文集**（pp. 68-77）。臺中市：國立臺中教育大學數學教育學系。
- 吳德邦與馬秀蘭（譯）（2009a）。**小學數學推理與解題習作簿**。臺北市：心理出版社。（Krulik, S., & Rudnick, J. A.）
- 吳德邦與馬秀蘭（譯）（2009b）。**小學數學教學資源手冊—推理與解題導向**。臺北市：心理出版社。（Krulik, S., & Rudnick, J. A.）
- 李源順、王美娟、蘇意雯與陳怡仲（2009）。臺灣學生在 TIMSS 的數學表現及其啟示。**研習資訊**，26（6），61-71。
- 周淑惠（1995）。**幼兒數學新論—教材教法**。臺北市：心理出版社。
- 洪文東（2000）。從問題解決的過程培養學生的科學創造力。**屏師科學教育**，11，

52-62。

陳進春與吳德邦 (2005)：醫護專科學校學生 van Hiele 幾何思考層次之研究。

測驗統計年刊，13 (2)，230-260。

洪明賢 (2003)。國中生察覺數形規律的現象初探。未出版碩士論文，國立臺灣師範大學，臺北市。

馬秀蘭 (2007)。學生思考過程之探究：以實務推理為例。科學教育學刊，15 (4)，387-416。

馬秀蘭與吳德邦 (譯) (2009a)。中學數學推理與解題習作簿。臺北市：心理出版社。(Krulik, S., & Rudnick, J. A.)

馬秀蘭與吳德邦 (譯) (2009b)。中學數學教學資源手冊—推理與解題導向。臺北市：心理出版社。(Krulik, S., & Rudnick, J. A.)

張玉成 (1998)。思考技巧與教學。臺北市：心理出版社。

張春興 (1991)。現代心理學。臺北市：東華書局。

張春興 (1992)。張氏心理學辭典。臺北市：東華書局。

教育部 (1993)。國民小學課程標準。臺北市：台捷國際文化實業股份有限公司。

教育部 (2000)。國民中小學九年一貫課程暫行綱要—數學學習領域。臺北市：教育部。

教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要數學學習領域。臺北市：教育部。

陳龍安 (1998)。創造思考教學的理論與實際。臺北市：心理出版社。

賈馥茗 (1976)。英才教育。臺北：開南書局。

劉好 (1993)。國小數學科新課程中幾何教材的設計。載於國立嘉義師範學院 (編印)，國立嘉義師範學院八十二學年度數學教育研討會論文集 (69-79)。嘉義：國立嘉義師範學院。

劉福增譯 (1987, Russell, Bertrand 原著)。哲學問題及精采附集。臺北市：心理。

譚寧君 (1993)。兒童的幾何觀—從 van Hiele 幾何思考的發展模式談起。國民教育，33 (5/6)，12-17。

Angell, R. B. (1964). *Reasoning and logic*. New York: Meredith Publishing Company.

Burrill, G., & Romberg, T. A. (1998). Statistics and probability for the middle grades: Examples from mathematics in context. In S. P. Lajoie (Ed.), *Reflections on statistics: Learning, teaching, and assessment in grades K-12*(33-59). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Campbell, P. F. & Martin L. J. (1995). How primary students think and learn. In I. M. Carl (Ed.), *Prospects for school mathematics* (pp. 21-42). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial Reasoning. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 420-464). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

Coles, M. J. & Robinson, W. D. (Eds) (1989). *Teaching thinking*. Bristol: The Bristol

Press.

- Crowley, M. L. (1987). The van Hiele model of the development of geometric thought. In M. Lindquist & A. P. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12*(1-16). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Fuys, D., Geddes, D., & Tischler, R. (1988). *The van Hiele model of thinking in geometry among adolescents*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Gardner, H. (1983). *Frames of mind: The theory of multiple intelligences*. New York: Basic Books.
- Garfield, J., & Gal, I. (1999). Assessment and statistics education: Current challenges and directions. *International Statistical Review*, 67, 1-12.
- Gartenhaus, A. R. (1984). *Museums and critical thinking skills for students*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED249 128).
- Greer, B. (2000). Statistical thinking and learning. *Mathematical Thinking and Learning*, 2 (1 & 2), 1-10.
- Guilford, J. P. (1977). *Way beyond the IQ*. Buffalo, NY: Creative Education Foundation, Inc.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1993). *Reasoning and problem solving: A handbook for elementary school teachers*. Needham Heights, Mass: Allyn and Bacon. Inc.
- Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1999). Innovative tasks to improve critical- and creative-thinking skill. In L. V. Stiff, & F. R. Curcio (Eds.), *Developing mathematical reasoning in grades k-12* (pp. 138-145). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Liu, H. C., Chen, W. S., Chen, C. C., Jheng, Y. D., & Wu, D. B. (2011). Choquet Integral with Respect to High Order Extensional L-Measure. *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 44-47, 3579-3583.
- Liu, H. C., Wu, D. B., Jheng, Y. D., & Sheu, T. W. (2009). Theory of Multivalent Delta-Fuzzy Measures and its Application. *WSEAS TRANSACTIONS on INFORMATION SCIENCE and APPLICATIONS*, Volume 6(6), pp. 1061-1070.
- Molina, D. D. (1990). *The applicability of the van Hiele theory to transformational geometry*. Unpublished doctoral dissertation, The University of Texas at Austin.
- Moore, D. S. (1998). Statistics among the liberal arts. *Journal of the American Statistical Association*, 93, 1253-1259.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Piaget, J., Inhelder, B. & Szeminska, A. (1960). *The child's conception of geometry*. New York: Basic Book.
- Senk, S. L. (1989). van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(3), 309-321.
- Sternberg, R. J. (1997). *Successful intelligence*. New York: Penguin, Plume.
- Torrance, E. P., & Orlow, E. B. (1986). *Torrance tests of creative thinking streamlined (revised) manual*. Bensenville, IL: Scholastic testing Service.
- Treffinger, D. J., & Isaksen, S. G. (1992). *Creative problem solving: An introduction*. Sarasota, FL: Center for Creative Learning, Inc.
- Usiskin, Z. (1982). van Hiele levels and achievement in secondary school geometry. Chicago, IL: University of Chicago, Department of Education.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight: A theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.
- Wu, D. B. (2010). *Choquet Integral with Respect to the Composed Fuzzy Measure of Completed L-Measure and Delta-Measure*. Unpublished Doctoral dissertation, Taichung University of Education, Taichung, Taiwan.
- Wu, D. B. & Ma, H. L. (2006). The distributions of van Hiele levels of geometric thinking among 1st through 6th graders. In J. Novotna (Ed.), *Proceedings 30th Conference of the international group for the psychology of mathematics education*, 5, 409-416. Prague, Czech Republic: PME.
- Wu, D. B. & Ma, H. L. (2009). An Application of GM(0,N) on Analyzing the First van Hiele Geometrical Thinking Level. *Journal of Grey System*, 12(4), 161-168.
- Wu, D. B. & Ma, H. L. (2010). An application of GM(0,N) to analyze the Ma-Wu's test of Practical reasoning abilities. *Proceedings of the Sixth IASTED International Conference Advances in Computer Science and Engineering (ACSE 2010)* (pp.232-237). March 15-17, 2010. Sharm El-Sheikh, EGYPT.
- Wu, D. B. & Ma, H. L. (2011). Analyzing the Test of Problem Solving Abilities by Using GM(0,N). *Applied Mechanics and Materials*, Vols. 44-47, 3922-3926.