

結合知識結構之 Q 矩陣設計於 DINA 模式 之估計成效探究

吳慧珉¹ 張育蓁² 林宏昇³

¹國家教育研究院測驗及評量研究中心

²彰化縣永靖鄉永靖國民小學

³臺中市烏日區僑仁國民小學

摘要

本研究提出結合專家知識結構與學生知識結構之 Q 矩陣設計，透過實證資料探討結合知識結構之 Q 矩陣在認知診斷模式—DINA 模式的估計成效；並探究 DINA 模式和 IRT 模式試題參數的相關性。研究結果顯示：（1）DINA 模式猜測參數 g 與 IRT 模式猜測參數之間沒有顯著相關，DINA 模式 1-s-g 參數與 IRT 模式鑑別度參數之間有顯著相關。（2）結合專家知識結構與結合學生知識結構的 Q 矩陣，都能提升認知屬性之診斷辨識率。（3）在 Q 矩陣中加入專家知識結構辨識率較學生知識結構佳。

關鍵字：知識結構、因數與倍數、認知診斷模型、DINA 模式、Q 矩陣

The Research in DINA Model with Different Q Matrix Designs Incorporating Knowledge Structures

Huey-Min Wu^{*} Yu-Chen Chang^{**} Hung-Sheng Lin^{***}

^{*} Research Center for Testing and Assessment,
National Academy for Educational Research

^{**} Yong Jing Elementary School, Changhua County

^{***} Chiao Ren Elementary School, Taichung City

Abstract

The purpose of this study was to explore the performance of cognitive diagnostic model with different Q matrix designs, the expert knowledge based structure and the student knowledge based structure. Otherwise, the relations of item parameters between DINA model and three-parameter IRT model were explored. The results showed in the following: 1) There is significant relationship between 1-s-g parameter in DINA model and the discrimination parameter in IRT model; 2) The diagnosis accuracy of DINA model increased when the Q matrixes were designed with the expert knowledge structure and with the student knowledge structure; 3) With two types of the Q matrixes, the performance of the expert knowledge structure was better than that of the student knowledge structure.

Keywords: knowledge structure, factor and multiple, cognitive diagnosis models, DINA model, Q Matrix

壹、研究動機與目的

Nichols (1994) 發展認知診斷評量 (cognitively diagnostic assessment, CDA) 主要討論受試者潛在的特質與作答反應的關係。de la Torre (2009a) 研究指出, 認知診斷模式 (cognitive diagnosis models, CDMs) 其分數型態能有效測量受試者的學習狀態。Tatsuoka (1985) 提出認知診斷評量模式使用時, 必須依據測驗目的建立所要評量的認知屬性, 再考量屬性的難易度與相似程度組合成試題, 並藉由關聯矩陣 (incidence matrix), 通常以 Q 矩陣呈現每個試題對應到的認知屬性。施測者可藉由受試者的試題反應組型與 Q 矩陣, 推估受試者具備或缺乏哪些認知屬性, 藉以瞭解受試者的學習狀況, 並進行補救教學 (de la Torre, 2008)。目前認知診斷模式中, DINA 模式 (deterministic inputs, noisy "and" gate model) 採用較簡單的模式定義, 因此常被應用在認知診斷測驗的參數估計或測驗組卷方面。

在認知診斷測驗中 Q 矩陣佔有重要地位, 國內外學者對 Q 矩陣設計的研究如下: Rupp & Templin (2008) 在研究中探討使用不適配的 Q 矩陣的結果; de la Torre & Douglas (2008) 設計多重 Q 矩陣藉以模擬不同的解題策略; de la Torre (2009a) 開發以選項為基礎的 DINA 模式; de la Torre & Lee (2010) 驗證 DINA 模式參數估計之不變性; 王文卿 (2010) 藉由 Q 矩陣設計比較 DINA 與 G-DINA 模式 (generalized DINA model) 參數估計的準確性; 陳亭宇 (2010) 藉由不同認知屬性分布的 Q 矩陣設計, 探討 DINA 與 G-DINA 模式參數不變性; 卓淑瑜 (2011) 設計不同 Q 矩陣的平均認知屬性數量, 探討以 DINA 模式為基礎的認知診斷適性測驗的診斷辨識率。

由上述整理發現, 目前的研究僅考量認知屬性的分布或平均測量數量, 較少涉及認知屬性之間的關係, Leighton, Gierl & Hunka (2004) 提出在認知屬性上加上階層式的架構, 在估計受試者認知屬性時就可以減少屬性組合數, 提升估計精準度, 因此本研究編製結合知識結構的 Q 矩陣, 將不同演算法則所定義的知識結構中運用於 Q 矩陣設計中, 探討結合不同知識結構的 Q 矩陣設計在 DINA 模式的估計成效。

九年一貫課程綱要將數學分為「數與量」、「幾何」、「代數」和「統計與機率」四個主題, 在「數與量」中與因數倍數相關的能力指標為「N-2-04 能理解因數、倍數、公因數與公倍數」、「N-3-01 能認識質數、合數, 並做質因數分解」、「N-3-02 能理解最大公因數、最小公倍數與兩數互質的意義, 並用來將分數約成最簡分數」, 根據主題能力指標並依年級細分後, 五年級的分年細目「5-n-03 能理解因數、倍數、公因數與公倍數」, 主要內容是讓學生初步認識因數與倍數的概念, 並且解決因數與倍數相關的簡單計算及應用問題。

在國小數學課程中, 五年級是學習內容的一大分野, 特別是上學期「因數與倍數」單元, 由於名詞過於抽象且容易混淆, 常造成教師教學與學生學習的困擾, 尤其研究者在教學現場發現, 五年級學生「倍數」的學習成效比「因數」的學習

成效高，原因是學生的先備經驗中已學習到「幾的幾倍」的倍數概念，所以對於倍數及公倍數的學習並沒有太大困難；然而，「因數」是一個完全陌生且抽象的概念，學生很難從除法算式中發現因數，就只能以死記死背的方式找因數，但是當學生不能完全理解因數的概念時，就很容易與倍數概念混淆，或是在進行除法找因數時，將不能整除的數也當成該數的因數之一，造成找出所有因數時有缺漏，甚至因為不能理解題意而無法解決因數及公因數相關的應用問題。當學生在因數概念內容的理解遭遇困難，對於後續「認識與計算公因數」、「瞭解因數與倍數的關係」等學習也會造成影響。

目前因數與倍數的研究大多以成就測驗為主，較缺乏學生對概念內容理解過程與補救教學的資訊，因此本研究將編製一份診斷測驗進行 DINA 模式分析，藉以瞭解學生在因數與倍數單元的概念理解過程與學習狀況，並將學生作答資料進行試題反應理論 (item response theory, IRT) 中三參數分析，探究 DINA 模式與 IRT 模式參數值的相關性。

綜上所述，本研究在認知屬性上加入專家知識結構以及學生知識結構兩種階層性架構，並且將兩種階層性架構分別與認知屬性對應試題的 Q 矩陣結合，透過實證資料，比較結合不同知識結構的 Q 矩陣設計參數估計的成效。研究目的條列如下：

- 一、探討 DINA 模式與 IRT 模式參數值的關聯性。
- 二、比較結合知識結構 Q 矩陣設計之 DINA 模式估計成效。

貳、文獻探討

一、試題反應理論介紹

本研究將利用 IRT 模式分析學生作答資料，藉以比較認知診斷模式的參數值與 IRT 模式參數值之間的關係。余民寧 (2009) 指出，試題反應理論 (IRT) 的基本概念為：受試者在測驗試題上的表現情形，可藉由潛在特質 (latent traits) 或能力 (abilities) 預測或解釋。

以下介紹本研究使用的三參數 IRT 模式，三參數 logistic 模式 (three-parameter logistic model, 3PLM) 提出，公式如下 Load(1980):

$$P_j(\theta) = C_j + (1 - C_j) \frac{e^{a_j(\theta - b_j)}}{1 + e^{a_j(\theta - b_j)}} \quad j = 1, 2, \dots, J \quad (\text{公式 1})$$

其中， $P_i(\theta)$ 表示任何一位能力為 θ 的考生答對試題 j 或在試題 j 上正確反應的機率； b 表示試題難度 (difficulty) 參數； a 表示試題鑑別度 (discrimination) 參數，用以描述試題 j 所具有區分不同能力受試者的特性； c 表示猜測度參數 (pseudo-chance parameter)，代表低能力考生亦可能答對的機率； J 是該測驗的試題總數； e 代表以底為 2.718 的指數。

本研究所編製的測驗是選擇題型測驗，宜考量猜測因素，除了探究試題的難度參數及鑑別度參數外，還包含猜測參數，因此採用 IRT 模式中的三參數模式進

行分析。

二、DINA 模式介紹

認知診斷模型 (CDMs) 以認知屬性作為診斷目標，藉以診斷學生是否精熟該單元須具備的認知屬性，因此學生在各項技能的表現被區分為精熟 (masters) 與不精熟 (non-masters)。CDMs 這種心理計量學模式可以用在判斷受試者的優勢與劣勢，而且作答分數的呈現可以讓施測者有效測量學生的學習狀況和進步情形 (de la Torre, 2009b)。舉例說明，CDMs 在評估診斷 K 個認知屬性的測驗，指定每個受試者一個二元精熟分數 (binary mastery scores) 向量，以 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_k)$ 表示。例如 K=4，若某個受試者的 $\alpha = (1, 1, 1, 0)$ 表示他在第 1、第 2、第 3 個屬性表現是精熟的，而對第 4 個屬性不夠精熟。

因為受試者的 K 個認知屬性都可能精熟與不精熟，產生 2^K 個反應組型，例如當 K=4，所有可能的反應組型共 16 種：

(1, 1, 1, 1) (1, 1, 1, 0) (1, 1, 0, 1) (1, 0, 1, 1)
(0, 1, 1, 1) (1, 1, 0, 0) (1, 0, 1, 0) (1, 0, 0, 1)
(0, 1, 1, 0) (0, 1, 0, 1) (0, 0, 1, 1) (1, 0, 0, 0)
(0, 0, 0, 1) (0, 1, 0, 0) (0, 0, 1, 0) (0, 0, 0, 0)

CDMs 使用時先依據測驗目的建立所要測得的認知屬性，再考量認知屬性的難易度、教學順序或認知屬性相似程度組合成試題，並藉由 Q 矩陣 (Q matrix) 表示每個試題對應到的認知屬性 (Tatsuoka, 1985)。

Q 矩陣的大小就為 J×K，表示第 j 個試題是否需具備認知屬性 k，其定義如下：

$$Q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 個試題需要第 } k \text{ 個認知屬性} \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

其中， $j=1 \dots J$

$k=1 \dots K$

由上述定義得知，每一試題恰好就是 Q 矩陣的一列，以下列 Q 矩陣來說明：

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

由上述的 Q 矩陣可知，試題一需要認知屬性 1 及認知屬性 3，試題二需要認知屬性 1 及認知屬性 2，依此類推。Q 矩陣通常是由學科專家所建立的，學科專家除了決定每一試題所需要的認知屬性外，也必須決定認知屬性的精熟將如何影響受試者的作答機率。

DINA 模式是許多認知診斷及評估方法的基礎，適用於以二元計分項目來進行認知診斷評量的測驗，Junker & Sijtsma (2001) 的研究是此模式創建與流行的

開始。此模式假設受試者具備解該試題所需的認知屬性，即能答對試題，但粗心（slip）與猜測（guess）這兩個參數又會影響答對該試題的機率。

DINA 模式的公式如下：

$$P(Y_{ij} = 1 | \alpha_i) = (1 - s_j)^{\eta_{ij}} g_j^{1 - \eta_{ij}} \quad (\text{公式2})$$

其中

$$\eta_{ij} = \prod_{k=1}^K \alpha_{ik}^{Q_{jk}} \quad (\text{公式3})$$

$$s_j = P(Y_{ij} = 0 | \eta_{ij} = 1)$$

$$g_j = P(Y_{ij} = 1 | \eta_{ij} = 0)$$

其中

Y_{ij} :第 i 個受試者在試題 j 的反應組型。

s_j :代表受試者完全具有回答試題 j 所需的認知屬性，卻因粗心而答錯該題的機率。

g_j :代表受試者不完全具有回答試題 j 所需的認知屬性，卻因猜測而答對該題的機率。

α_{ik} :代表受試者 i 是否具備第 k 個認知屬性，具備該屬性其值為 1，無則為 0。

Q_{jk} :受試者答對試題 j 是否需要認知屬性 k，如需要該屬性其值為 1，無則為 0。

η_{ij} :代表受試者是否具備答對試題 j 所需的所有認知屬性，其值為 1 表示該受試者全部具備，其值為 0 表示該受試者至少缺少 1 個答對第 j 個試題所需的認知屬性。

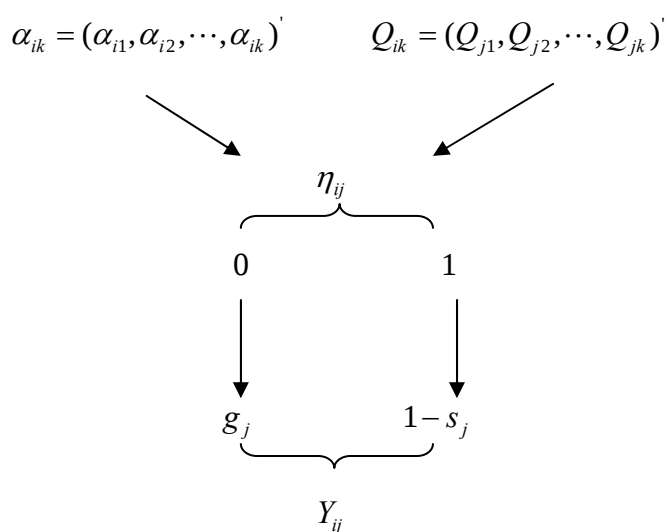


圖 1 受試者對試題 j 的反應程序圖（引自：de la Torre, 2009b）

de la Torre (2009a) 以分數的減法為例，說明 DINA 模式的計算方法。首先，設定「分數的減法」所需要的 5 個認知屬性，如表 1；其次，依照測驗目的與認知屬性設計的題目，即表 2；表 3 則為本例題需要認知屬性的 Q 矩陣，因此可知解此題目需具備認知屬性 1~3。

表 1 分數的減法認知屬性（引自：de la Torre, 2009b）

認知屬性	敘述
A1	從整數部分借 1
A2	基本分數減法
A3	分數化簡
A4	將分數中整數與分數部分分開
A5	將整數變成分數

表 2 分數的減法例題（引自：de la Torre, 2009a）

$2\frac{4}{12} - \frac{7}{12} =$			
A: $2\frac{3}{12}$	B: $2\frac{1}{4}$	C: $1\frac{9}{12}$	D: $1\frac{3}{4}$

表 3 分數的減法例題之 Q 矩陣設計（引自：de la Torre, 2009b）

屬性	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
Item	1	1	1	0	0

因為 DINA 模式考慮粗心及猜測兩個參數，假設試題參數 $s_1 = 0.2$ 、 $g_1 = 0.2$ ，並假設 3 名受試者所具備的認知屬性如表 4，即受試者 1 完全具備本試題所需要的認知屬性 1~3，因此 $\eta_{11} = 1$ ，受試者 2 及受試者 3 至少缺乏 1 個此試題所需的認知屬性，因此 $\eta_{21} = 0$ 且 $\eta_{31} = 0$ 。

表 4 受試者的認知屬性

屬性	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄	A ₅
受試者 1	1	1	1	1	0
受試者 2	0	1	0	0	1
受試者 3	0	1	1	1	1

計算受試者在試題的答對機率如下：

$$p(Y_{11} = 1 | \alpha_1, s_1, g_1) = (1 - s_1)^{\eta_{11}} g_1^{(1 - \eta_{11})} = (1 - 0.2)^1 (0.2)^{1-1} = 0.8$$

$$p(Y_{21} = 1 | \alpha_2, s_1, g_1) = (1 - s_1)^{\eta_{21}} g_1^{(1 - \eta_{21})} = (1 - 0.2)^0 (0.2)^{1-0} = 0.2$$

$$p(Y_{31} = 1 | \alpha_3, s_1, g_1) = (1 - s_1)^{\eta_{31}} g_1^{(1 - \eta_{31})} = (1 - 0.2)^0 (0.2)^{1-0} = 0.2$$

受試者 1 因為完全具備解題所需的三個認知屬性，因此答對機率最高，受試者 2 及 3 至少缺少一個以上的認知屬性，在 DINA 模式下認為受試者答對的機率為猜測的機率。

綜上所述，在 CDMs 判斷認知屬性的方法中，DINA 模式只考慮粗心及猜測兩個參數，可說是簡單且容易解釋的模式（de la Torre & Douglas, 2004），國內已有學者王文卿（2010）、陳亭宇（2010）、卓淑瑜（2011）在研究中使用 DINA 模式進行認知診斷測驗分析，得到良好的分析成效，本研究亦使用認知診斷模式中的 DINA 模式，作為評估受試者認知屬性的工具。

三、結合知識結構之 Q 矩陣設計

（一）順序理論

Airasian & Bart（1973）提出順序理論（ordering theory, OT），用以表示試題間的順序性，理論介紹如下：

令 $X = (X_1, X_2, \dots, X_J)$ 表示一個向量包含 J 個二元試題成績變數，每一個受試者

作答 J 題得到一個 0 與 1 的向量 $X = (X_1, X_2, \dots, X_J)$ 之後，兩試題 j 和 k 的聯合邊際機率，如表 5：

表 5 試題 j 與試題 k 之聯合邊際機率

		試題 k		
試題 j		$X_k = 1$	$X_k = 0$	總和
	$X_j = 1$	$P(X_j = 1, X_k = 1)$	$P(X_j = 1, X_k = 0)$	$P(X_j = 1)$
	$X_j = 0$	$P(X_j = 0, X_k = 1)$	$P(X_j = 0, X_k = 0)$	$P(X_j = 0)$
	總和	$P(X_k = 1)$	$P(X_k = 0)$	1

假設 $\varepsilon_{jk}^* = P(X_j = 0, X_k = 1)$ 為試題 j 答錯而試題 k 答對的機率，當 $\varepsilon_{jk}^* < \varepsilon$ 時（ ε 為一閾值，設定 $0.02 \leq \varepsilon \leq 0.04$ ），即表示試題 j 和試題 k 則有順序關係，兩個試題的關係可標記為 $X_j \rightarrow X_k$ ，也就是試題 j 是試題 k 的下位試題。

Wu, Kuo, & Yang (2012) 針對各種不同的知識結構，包括 Diagnosys、OT、item relational structure theory (IRS) 與專家結構比較估計成效，研究結果發現：在 OT 結構中，樣本數大小對於預測精確性的影響較小，且 OT 結構比專家結構的預測精準度好；利用具有階層性的知識結構，可以快速有效的評量學生的學習成效，以 OT 結構為基礎的電腦化適性測驗是有效的評量模式。

除了上述研究之外，亦有多位學者運用 OT 演算法進行相關研究，如：曾彥鈞 (2006)、莊惠萍 (2007)、林立敏 (2007)、劉育隆 (2007)、林婉星 (2008)、白曉珊 (2008)、汪端正 (2008)、莊銘豪 (2008)、許曜瀚 (2008)、何秀芳 (2009)、卓淑瑜 (2011) 等，都是將 OT 演算法運用在建立學生試題結構，因此本研究採用 OT 演算法分析學生試題結構，並結合詮釋結構模式建立學生知識結構。

(二) 結合學生知識結構的 Q 矩陣

學者佐藤隆博 (1979) 提出詮釋結構模式，劉育隆 (2012) 將認知屬性對應試題的 Q 矩陣以及 OT 分析得到的學生試題結構互相結合，建立學生知識結構演算法，其研究結果顯示：學生認知屬性結構能夠比專家依照教學順序編製的專家知識結構，更明確的呈現學生學習認知屬性的過程，可做為補救教學路徑。本研究參考劉育隆 (2012) 提出建立學生概念結構演算法，演算法則以範例說明如下：

1. 專家定義的 Q 矩陣包含四個認知屬性、五題試題，矩陣中呈現專家認為要答對 I_1 試題必須具備 A_1 ，要答對 I_2 試題必須具備 A_1 與 A_3 兩個概念，以此類推，如表 6 所示：

表 6 專家定義之 Q 矩陣

試題 認知屬性	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
A_1	1	1	0	0	0
A_2	0	0	1	0	0
A_3	0	1	0	1	0
A_4	0	0	0	1	1

2.利用順序理論建立學生的試題結構，得到圖 2 學生試題順序結構及表 7 可達矩陣 R。

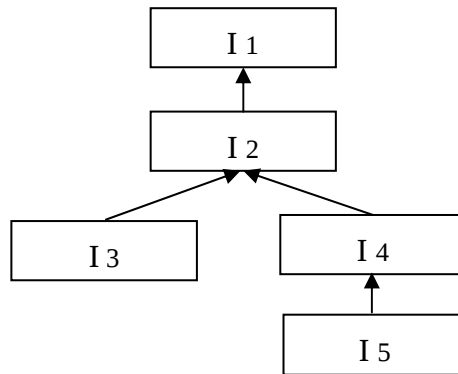


圖 2 學生試題順序結構

表 7 可達矩陣 R

	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
I_1	0	0	0	0	0
I_2	1	0	0	0	0
I_3	1	1	0	0	0
I_4	1	1	0	0	0
I_5	1	1	0	1	0

3.利用公式 $KI = Q * (R + I)$ 矩陣運算（布林加法代數），建立認知屬性關聯試題矩陣 KI ，如表 8。本研究將此矩陣 KI 定義為結合學生知識結構的 Q 矩陣。

表 8 認知屬性關聯試題矩陣

試題 認知屬性	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5
A_1	1	1	0	0	0
A_2	1	1	1	0	0
A_3	1	1	0	1	0
A_4	1	1	0	1	1

四、因數與倍數教材內容分析

國小五年級數學課程是學生學習上一大分野，尤其是五年級上學期的「因數與倍數」單元，教材內容是讓學生認識因數、倍數、公因數、公倍數，它與日後分數四則運算、比與比值等學習密切相關，在數學學習上占很重要的地位，以下就教材內容及相關研究加以討論。

(一) 教材重點

教育部 2003 年九年一貫數學課程綱要中，與因數、倍數相關的能力指標 N-2-04「能理解因數、倍數、公因數與公倍數」，五年級的分年細目為 5-n-03「能理解因數、倍數、公因數與公倍數」為因數與倍數的基礎介紹，茲就因數與倍數的概念意義分析如下：

1. 因數的意義

因數的了解與找法，可經由小正方形排列長方形的方式，要求兒童要剛好分完而且每一排要一樣多，引導兒童應用各種排列方式，找出所有可能的長方形。方法有二：使用除法解決剛好分完的情況，知道沒有餘數來認識整除，並繼續完成所有整除的算式，從中找出所要認識的因數，意即在整除的算式「被除數 $\div$ 除數=商」中，瞭解除數和商都是被除數的因數；或用乘法探討一排幾個可排成幾排，給定的總數利用兩數相乘的方式來合成，以此建立因數的概念。

2. 倍數的意義

在學生先備經驗中，已經學過「倍」的意義，倍數的找法就是利用乘以正整數的方式來計算，得到積為乘數和被乘數的倍數；或是由整除的算式「被除數 $\div$ 除數=商」中，瞭解被除數是除數和商的倍數。再經由活動瞭解，一個整數最小的倍數是該數本身，而且一個整數的倍數有無限多個。

3. 公因數的意義

公因數是以探討一個指定整數有哪些因數為基礎，可以繼續探討 2 個或 2 個以上整數有哪些相同的因數，而這些相同的因數就叫做公因數。意即當一個整數是甲的因數，同時也是乙的因數時，這個整數就是甲數和乙數的公因數，而且 2 個或 2 個以上的整數的公因數中，必定存在且最小的是 1。

4. 公倍數的意義

公倍數找法與公因數相似，是以探討一個指定整數有哪些倍數為基礎，可以繼續探討 2 個或 2 個以上整數有哪些相同的倍數，而這些相同的倍數就叫做公倍數。但是因為倍數有無限多個，因此在找公倍數時，會指定在某一數量範圍，由

小到大列出。

(二) 各版本教材比較

目前各校使用的數學教材版本不同，主要有南一版(2011)、康軒版(2011)、翰林版(2011)及部編版(2011)等四個版本，針對這四個版本中關於因數與倍數單元的教學內容順序，彙整如表 9。

表 9 各版本因數與倍數教學內容順序

南一版 五上 第 2 單元 因數與倍數 1.整除的意義 → 2.因數的意義及找法 → 3.公因數的意義及應用 → 4.倍數的意義及找法 → 5.公倍數的意義及應用 → 6.因數和倍數的關係
康軒版 五上 第 2 單元 因數與倍數 1.認識整除 → 2.認識因數 → 3.找公因數 → 4.認識倍數 → 5.判別 2、5、3 及 10 的倍數 → 6.找公倍數
翰林版 五上 第 3 單元 公倍數與公因數 1.認識倍數 → 2.認識公倍數 → 3.認識因數 → 4.認識公因數 → 5.因數和倍數的關係 → 6.判別 2、5、10 的倍數
部編版 五上 第 3 單元 倍數與因數 1.認識倍數 → 2.認識公倍數 → 3.認識因數 → 4.認識公因數

比較各版本課程教學順序：南一版和康軒版相同處是從引發學生先備知識一整除的概念開始，再依序介紹因數、公因數，接著才介紹倍數與公倍數，兩者相異處在於南一版最後介紹因數與倍數之間的關係，而康軒版則加上判別 2、3、5 和 10 的倍數規律；翰林版和部編版則是由學生較熟悉的倍數開始，再介紹公倍數，接著才介紹因數、公因數的概念，兩者差異在於翰林版加入因數和倍數的關係，以及如何判別 2、5、10 的倍數。

針對各版本因數、倍數、公因數與公倍數概念的教學方式，彙整如表 10：

表 10 各版本因數與倍數教學方式

因數 教學 方式	南一版：以乘法的方式合成整數，認識因數 佈題：用 6 張小正方形紙卡排成長方形，可以有哪些排法？ 圖解，可用 2 張一行、或用 3 張一行排成長方形…。 $6=2 \times 3=3 \times 2=1 \times 6=6 \times 1$ ；所以 6 個因數有 1、2、3、6。
	康軒版：以除法方式，當餘數為 0 時，除數即為被除數的因數 佈題：10 個學生要平分成幾組，可以剛好分完？ $10 \div 1=10$ 、 $10 \div 2=5$ 、 $10 \div 5=2$ 、 $10 \div 10=1$ ，可分成 1、2、5、10 組。因為 10 可以被 1、2、5、10 整除，1、2、5、10 都是 10 的因數。

倍數 教學 方式	翰林版：以除法方式，當餘數為 0 時，除數即為被除數的因數 佈題：12 人要進行分組，每組分成幾人時剛好分完？ $12 \div 1 = 12$、$12 \div 2 = 6$、$12 \div 3 = 4$、$12 \div 4 = 3$、$12 \div 6 = 2$、$12 \div 12 = 1$ 因為 12 除以 1、2、3、4、6、12 都能整除，所以可分成 1、2、3、4、6、12 人。則 1、2、3、4、6、12 都稱為 12 的因數。
	部編版：以乘法的方式合成整數，認識因數 佈題：用 12 個 1 平方公分的小方塊排成長方形，有哪些形狀？ 圖示，$12 = 1 \times 12 = 12 \times 1$、$12 = 2 \times 6 = 6 \times 2$、$12 = 3 \times 4 = 4 \times 3$，共 6 種。所以 1、2、3、4、6、12 都是 12 的因數。
	南一版：經由乘法的整數倍，認識倍數 佈題：每輛汽車 4 個輪子。2 輛共有幾個輪子？3 輛共有幾個輪子？ $4 \times 2 = 8$ 且 $4 \times 3 = 12$，所以 2 輛共有 8 個輪子，3 輛共有 12 個輪子。8 和 12 都是 4 的倍數。
	康軒版：經由乘法的整數倍，認識倍數 佈題：6 元的 3 倍是多少？6 元的 4 倍是多少？ $6 \times 3 = 18$，6 元的 3 倍是 18 元；$6 \times 4 = 24$，6 元的 4 倍是 24 元。18 和 24 是 6 的倍數。
	翰林版：經由乘法的整數倍，認識倍數 佈題：一盒巧克力有 4 顆，2 盒巧克力有幾顆？3 盒有幾顆？ 4 的 1 倍是 4，4 的 2 倍是 8，4 的 3 倍是 12；所以 2 盒巧克力有 8 顆，3 盒巧克力有 12 顆。4、8、12 都是 4 的倍數。
	部編版：經由乘法的整數倍，認識倍數 佈題：$12 = 12 \times 1$、12 是 12 的 1 倍；$24 = 12 \times 2$、24 是 12 的 2 倍；$36 = 12 \times 3$、36 是 12 的 3 倍。 因此 12、24、36 稱為 12 的倍數。
公因數教學（各版本皆同）：直接列出 2 個整數的所有因數，找出數列中相同的數，即為 2 個整數共同的因數。	
公倍數教學（各版本皆同）：由小到大，分別列出 2 個整數的倍數數列，找出數列中相同的數，即為 2 個整數共同的倍數。	

比較各版本課程內容：在介紹因數時，南一版和部編版都是以乘法的方式合成整數，來認識一個數的因數，但是南一版會先以實際操作的方式，再利用乘法算式記錄過程導出因數概念，而部編版則是直接列出所有的乘法算式，再介紹這些數稱為該整數的因數；康軒版和翰林版都是以人數分組為例題，從除法算式中發現，當餘數為 0 時，除數即為被除數的因數，並依序找出一個整數所有的因數。而倍數、公因數與公倍數的概念介紹，在各版本教材的介紹並無太大的差異。

根據上述的討論與分析，本研究統整各版本的教學內容編製因數與倍數的認知屬性，並結合各版本教學順序編製成專家知識結構。

（三）相關研究

本研究分析因數與倍數的相關研究，大致分為兩部分討論：第一部分是因數與倍數概念的統整，第二部分是解題策略與迷思概念。

1. 因數與倍數概念

林佩如（2002）分析五年級因數與倍數教材，提出因數與公因數的概念應包括：因數的意義、如何找因數、解決因數的應用問題、認識只有兩個因數的整數（質數）、公因數的意義、找兩個（或兩個以上）整數的公因數、解決公因數的應用問題、找兩個（或兩個以上）整數的公因數，再找出最大公因數。

邱慧珍（2002）分析五年級因數與倍數教材，提出倍數與公倍數的概念包括：倍數的意義、倍數的運算、倍數的應用問題、公倍數的意義、找兩個（或兩個以上）整數的公倍數、解決公倍數的應用問題、最小公倍數的意義、找兩個（或兩個以上）整數的公倍數，再找出最小公倍數。

吳育楨（2008）討論國小六年級因數與倍數教學內容，分析出因數與倍數概念包括：因數、倍數、公因數、公倍數、質數、合數和互質的意義；找出某數的全部因數或數個倍數；利用列舉法找出兩個數的公因數或公倍數；利用列舉法、質因數與短除法找出兩個數的最大公因數或最小公倍數；解決因數與倍數相關的應用問題。

劉伊祝（2008）分析五年級因數與倍數單元，提出因數與倍數的概念包括：藉由整除瞭解因數的意義、利用整除找出某數的因數、解決因數的應用問題、公因數的意義、察覺 1 是任意正整數的公因數、找出兩個數的所有公因數、解決公因數的應用問題、透過乘法問題瞭解倍數的意義、找出某數的倍數及覺察倍數有無限多個、判定 2、3、5 的倍數、解決倍數的應用問題、瞭解公倍數的意義、找出給定範圍內的所有公倍數、解決公倍數的應用問題。

除了因數與倍數的概念，部分學者還提出「因數與倍數之間的關係」概念，分述如下：

林珮如（2002）提出因數與倍數之間的關係，是透過除法或乘法原理找出因數與倍數的互逆關係。

邱慧珍（2002）提出因數與倍數之間關係的概念有二：

- （1）透過除法或乘法原理找出因數與倍數的互逆關係。
- （2）最小公倍數與最大公因數的關係。

劉伊祝（2008）提出因數與倍數之間的關係有三個步驟：

- （1）透過除法計算從餘數是否為 0，檢查某數是否為另一數的倍數。
- （2）透過乘法的解題紀錄，察覺因數與倍數的關係。
- （3）能解決因數與倍數的應用問題。

綜上所述，歸納出因數與倍數單元的學習，大致由認識概念的意義開始，再介紹計算方法與解決應用問題，最後探討因數與倍數之間的關係；另外，本研究主要探討五年級因數與倍數的概念，因此不包含六年級的最大公因數、最小公倍數、質數、合數及互質的概念。研究者參考上述學者提出的因數與倍數概念，統整成本研究的 13 個認知屬性。

2. 解題策略與迷思概念

關於學習因數與倍數的成效與困難的相關研究，學者指出國小學生學習因數與倍數困難主要是先備知識的不足（李浚淵，2003；謝哲仁、林榮貴，2006），另外有針對因數、倍數、公因數與公倍數的解題策略與迷思概念的研究，分述如下：

林珮如（2002）透過紙筆測驗及訪談，探討國小五年級學生在因數概念的解題策略、迷思概念及可能原因。學習因數及公因數的概念有：對概念的名詞混淆不清、概念遺漏、概念錯誤。

統整因數概念的錯誤解題策略包含下列幾點：

- (1) 誤解因數和倍數的意義：專有名詞概念混淆、認為倍數就是乘法而因數就是除法。
- (2) 誤解因數和公因數的意義。
- (3) 找因數和公因數會有缺漏或多寫。
- (4) 找因數時遺漏 1 或自己本身，找公因數時遺漏 1。
- (5) 解決因數和公因數的應用問題：先備知識不足或混淆、解題策略判斷錯誤、語意知識不足、用關鍵字聯想解題。

邱慧珍(2002)發展五年級倍數迷思概念的診斷試題，分析試題施測結果及晤談資料，統整出倍數相關知識的錯誤解題策略與迷思概念。學習倍數與公倍數的迷思概念有：概念混淆、概念遺漏、概念錯誤。

錯誤解題策略則包含：

- (1) 乘除符號誤導，倍數與因數概念互相誤解。
- (2) 倍數與公倍數名詞意義混淆。
- (3) 將 1 當成倍數，或遺漏數字本身也是倍數。
- (4) 把 1 當成公倍數，或直接把公倍數寫成最小公倍數。
- (5) 粗心遺漏、沒注意題目指定範圍。

何欣玫(2004)編製國小六年級學生因數與倍數之數學溝通解題能力測驗，分析學生解題溝通能力，並分析解題錯誤類型。統整出溝通類型有：內向表達型、外向理解型、全能優越型及多重障礙型。

解題錯誤類型包含：

- (1) 語言概念錯誤：語意了解錯誤、專有名詞概念混淆、語意知識不足。
- (2) 認知概念錯誤：運思能力不足、粗心錯誤、運算系統錯誤、直觀法則影響。
- (3) 策略概念錯誤：解題策略錯誤、計畫監控失誤。
- (4) 個人態度錯誤：厭惡思考、猜測。

綜上所述，學生在學習因數與倍數單元時，容易因為不熟悉因數概念的內涵，或是將因數與倍數的概念內涵互相混淆，造成學習公因數、公倍數產生問題；有些是解決問題時使用錯誤的解題策略，例如：在解決公因數的題目時，卻使用計算公倍數的策略……等，這些研究結果在教學現場時常發生，因此本研究在編製診斷測驗時，將這些錯誤類型運用在命題卡中，讓選擇題的選項更具有誘答力，讓專家能夠藉由判讀學生作答反應，更清楚判斷學生是否已具備該試題所包含的認知屬性。

參、研究方法

本研究依據九年一貫數學能力指標「5-n-03 能理解因數、倍數、公因數與公倍數」，分析將五年級因數與倍數單元所包含的認知屬性，依照認知屬性編製一份診斷測驗，經專家會議討論與修正後，進行施測；專家由受試者在建構反應題的作答資料獲得部分認知屬性的判斷資訊，其餘的認知屬性則藉由選擇題的作答選項加上個別訪談，藉以獲得專家判定受試者是否具備該試題所對應的認知屬性的資料，作為本研究之效標；將受試者作答資料進行 DINA 模式與 IRT 模式分析，藉以比較兩種模式參數值之間的相關性；接著設計結合專家知識結構與學生知識結構的 Q 矩陣，將不同的 Q 矩陣設計利用 DINA 模式評估，藉以比較受試者作答反應的辨識率成效。

一、研究對象

本研究旨在探討國小五年級學生因數與倍數單元的認知屬性，因此配合教師授課進度，透過立意取樣，選取全台北、中、南及金門地區共十一個班級，五年級學生共 322 名進行施測。

二、研究工具

本研究所使用的研究工具包括自編「國小五年級因數與倍數認知診斷測驗」，以及相關的軟體，茲說明如下：

(一) 自編「國小五年級因數與倍數認知診斷測驗」

本研究依據能力指標分析出 13 個認知屬性，編製診斷測驗試題共有 20 題選擇題，3 題建構反應題。編製流程說明如下：

1. 教材內容分析

根據分析各版本教材內容及參考文獻資料，將五年級因數與倍數單元所包含的認知屬性整理如表 11：

表 11 因數與倍數認知屬性內容

認知屬性敘述	對應題號
A1 從除法的結果中認識「因數」。	1、5、9、10、15、22
A2 以幾的幾倍，認識「倍數」。	2、3、7、8、10、19
A3 以除法或乘法找出所有的因數。	5、6、14、15、22、23
A4 以乘法或除法，判別兩數的倍數關係。	3、4、7、16、20
A5 認識 2、5 及 10 的倍數判別方法。	8、9
A6 能利用因數解決生活情境中的問題。	14、22
A7 列出兩數所有的因數，兩數共同的因數稱為「公因數」。	6、11、13、18、23
A8 能利用倍數解決生活情境中的問題。	16、20
A9 列出兩數的倍數數列認識「公倍數」，利用數列找出兩數的公倍數。	4、8、12、17、19、21
A10 利用甲的因數做為除數，找出甲乙兩數的公因數。	11、13
A11 能利用公因數解決生活情境中的問題。	18、23
A12 能利用公倍數解決生活情境中的問題。	12、17、21
A13 認識因數和倍數的關係。	10、19

2. 編製專家知識結構圖

依照課程順序及認知屬性的階層性繪製知識結構圖，再由專家會議討論結果如圖 3：

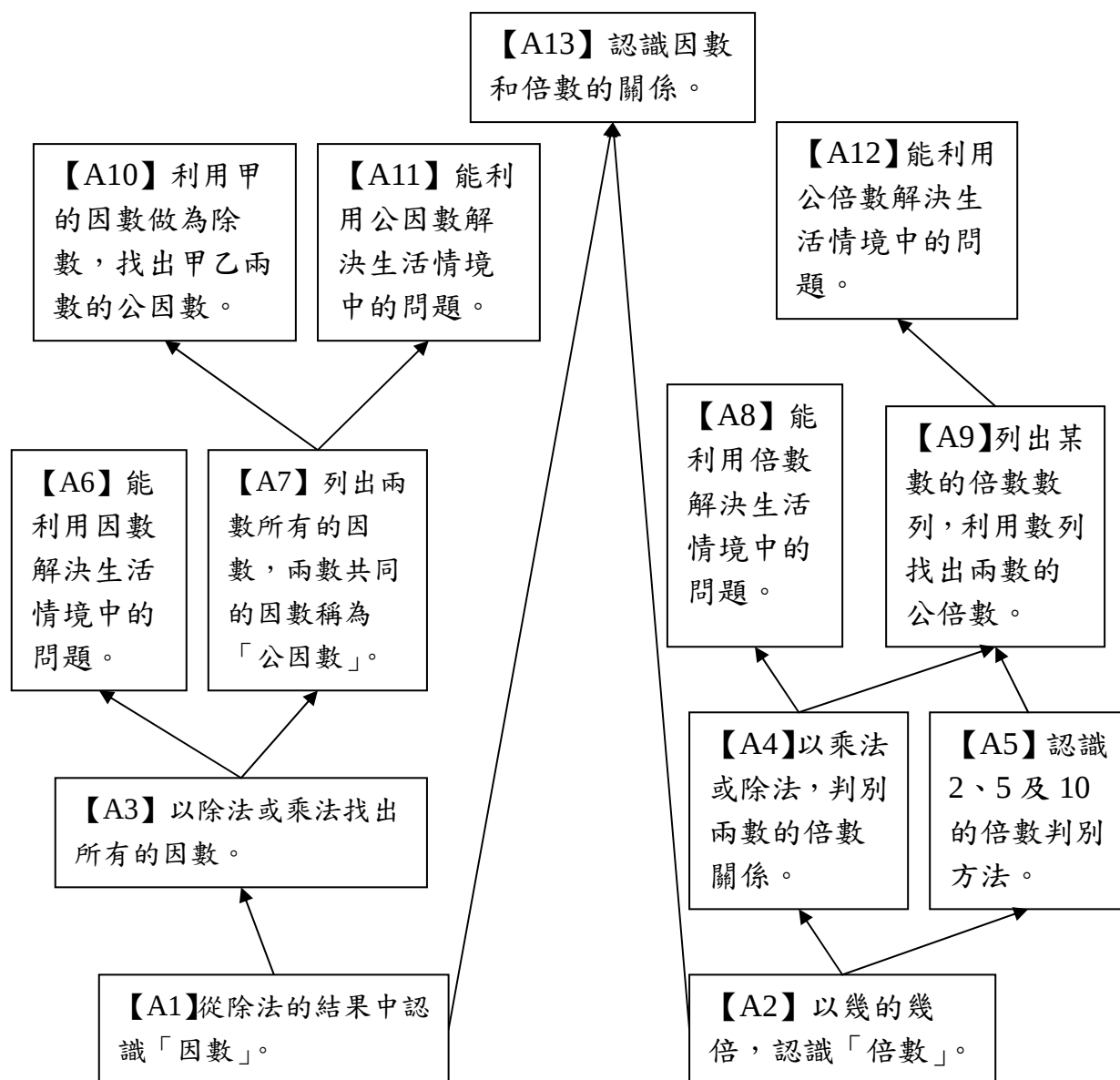


圖 3 專家知識結構圖

3.編製 Q 矩陣

本研究的測驗試題包含選擇題 20 題、建構反應題 3 題，認知屬性數共 13 個，Q 矩陣的設計中「1」代表該題有測量到該認知屬性，「0」則代表該題沒有測量到該認知屬性。根據王文卿（2010）研究結果：不平衡的 Q 矩陣設計估計準確性較平衡的 Q 矩陣為佳，當單一認知屬性對應到的題數較多時，可以提升該認知屬性的辨識率成效，並且影響到之後的認知屬性辨識率。故本研究的 Q 矩陣設計是採用不平衡設計，意即在測驗中每個認知屬性對應到的試題數總和是不相同的。本研究設計的認知屬性對應試題的 Q 矩陣，如表 12：

表 12 認知屬性對應試題的 Q 矩陣

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	合 計
Item1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Item2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Item3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item4	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	2
Item5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item6	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2
Item7	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item8	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	3
Item9	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
Item11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
Item12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
Item13	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
Item14	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	2
Item15	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item16	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
Item17	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
Item18	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	2
Item19	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	3
Item20	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	2
Item21	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
Item22	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
Item23	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	3
合計	6	6	6	5	2	2	5	2	6	2	2	3	2	

4.編製試題命題卡

本研究試題為自編試卷，分析教材內容，根據專家知識結構編寫命題卡，命題範例如下：

表 13 選擇題例題

題目	() 1.請問 25 的全部因數有幾個？(①1 ②3 ③5 ④無限多) 個			
選項	選項 1	選項 2	選項 3	選項 4
反應類型	【B9】認為任何數的因數只有 1。	◎	【B2】沒有完全看清題目就作答。認為題目在問因數有哪些。	【B4】不理解因數或公因數的認知屬性。
缺乏的認知屬性	【A3】以除法或乘法找出所有的因數。		【A3】以除法或乘法找出所有的因數。	【A1】從除法的結果中認識「因數」。

表 14 建構反應題例題

題目	21.糖果一大包不超過 50 顆，4 顆裝一盒或 6 顆裝一盒，都可以全部裝完，這一包糖果可能有幾顆？請列出所有可能的答案。
正確答案	(12、24、36、48) 顆
反應類型	【B05】不理解倍數或公倍數的認知屬性。 【B06】找所有因數或倍數時無法完整列出而有缺漏。 【B10】使用錯誤的運算策略。 【B11】認為公倍數只有兩數相乘的積。只寫出 24 顆 【B15】忽略題目中數字範圍限制。
缺乏的認知屬性	【A9】列出兩數的倍數數列認識「公倍數」，利用數列找出兩數的公倍數。 【A12】解決公倍數的應用問題。

(二) BILOG-MG 軟體

BILOG-MG 由 Zimowski, Muraki & Mislevy 等人 (1996) 所發展。本研究使用 BILOG-MG 的三參數對數模式，進行試題參數估計。

(三) Matlab 軟體

利用 OT 演算法，配合詮釋結構模式，建立適當的學生知識結構。

(四) Ox 軟體

Ox 是一個目標指向的統計系統，此軟體的表示及運算方式是一個有效率的矩陣語言，例如：矩陣相乘、計算反矩陣等。本研究利用 Ox 軟體，並且以 de la Torre & Lee (2010) 所編寫的 DINA 模式程式，用來估計受試者作答反應組型。

三、結合知識結構之 Q 矩陣設計

(一) 結合專家知識結構之 Q 矩陣

結合專家知識結構之 Q 矩陣是以圖四之專家知識結構圖為基礎，將該認知屬性的下位認知屬性也納入試題中，意即將認知屬性的上下位關係與 Q 矩陣結合，編製結合專家知識結構的 Q 矩陣，如表 15 所示：

表 15 結合專家知識結構的 Q 矩陣

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	合 計
Item1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Item2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Item3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item4	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
Item5	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item6	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	3
Item7	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item8	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	3
Item9	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	3
Item10	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3
Item11	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	2
Item12	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	2
Item13	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	4
Item14	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
Item15	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item16	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
Item17	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	4
Item18	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4
Item19	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	5
Item20	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	3
Item21	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	0	4
Item22	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	3
Item23	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	4
合計	12	12	8	8	2	2	5	2	6	2	2	3	2	

(二) 結合學生知識結構之 Q 矩陣

本研究首先使用不同閾值設定的 OT 演算法，得到結合學生知識結構的 Q 矩陣，進行 DINA 模式分析估計成效，如表 16：

表 16 不同閾值設定的學生知識結構 Q 矩陣估計成效表 (%)

	閾值設定					
	0.05	0.04	0.03	0.02	0.01	0.001
A1	67.39	81.06	80.12	82.92	83.54	84.16
A2	80.43	81.68	82.61	81.68	83.85	83.23
A3	80.12	84.47	86.34	85.40	85.71	85.71
A4	80.43	81.68	82.61	82.92	81.06	80.43
A5	82.61	86.96	86.96	84.16	91.61	90.99
A6	56.83	75.78	77.95	81.06	80.43	79.19
A7	79.19	81.68	81.99	79.81	79.81	79.50
A8	75.78	91.93	80.75	96.89	85.71	78.88
A9	75.16	80.12	80.43	80.12	80.12	80.75
A10	89.44	95.65	95.34	94.10	90.99	90.99
A11	53.42	85.09	85.40	82.92	82.92	81.99
A12	63.66	73.29	72.98	70.81	73.60	74.22
A13	57.76	87.89	81.99	83.85	87.27	86.02
平均	72.48	83.64	82.73	83.59	83.59	82.78

由表 16 結果顯示，使用不同閾值設定的 OT 演算法，得到結合學生知識結構的 Q 矩陣，在 DINA 模式分析時，認知屬性的辨識率並沒有隨著閾值設定越嚴格而越高，因此本研究僅以平均辨識率的高低作為選擇的標準，使用閾值設定 0.04 所得結合學生知識結構與 Q 矩陣結合，成為結合學生知識結構的 Q 矩陣，如表 17。

根據表 17 可建立學生知識結構圖（圖 4）。從圖 4 的學生知識結構圖中可發現，與因數相關的認知屬性（A1、A3、A6）成為倍數（A2、A4、A9）的上位認知屬性，表示學生普遍認為因數比倍數困難，與先前的研究結果符合；同時發現學生知識結構圖中出現與專家知識結構的順序不同之處，學生知識結構圖中公倍數（A12）成為倍數（A8）的下位認知屬性，公因數（A7、A10）也成為因數（A1、A3、A6）的下位認知屬性，如圖 4 所示：

表 17 結合學生知識結構的 Q 矩陣 (閾值設定 0.04)

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	合計
Item1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	7
Item2	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	6
Item3	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
Item4	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	3
Item5	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	8
Item6	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	7
Item7	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	6
Item8	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	6
Item9	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	7
Item10	1	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	1	8
Item11	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	6
Item12	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	7
Item13	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	6
Item14	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0	8
Item15	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	0	0	0	8
Item16	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	7
Item17	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	7
Item18	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	9
Item19	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	1	8
Item20	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	8
Item21	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	9
Item22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	11
Item23	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	0	9
合計	7	23	6	23	21	2	21	5	22	21	2	8	2	

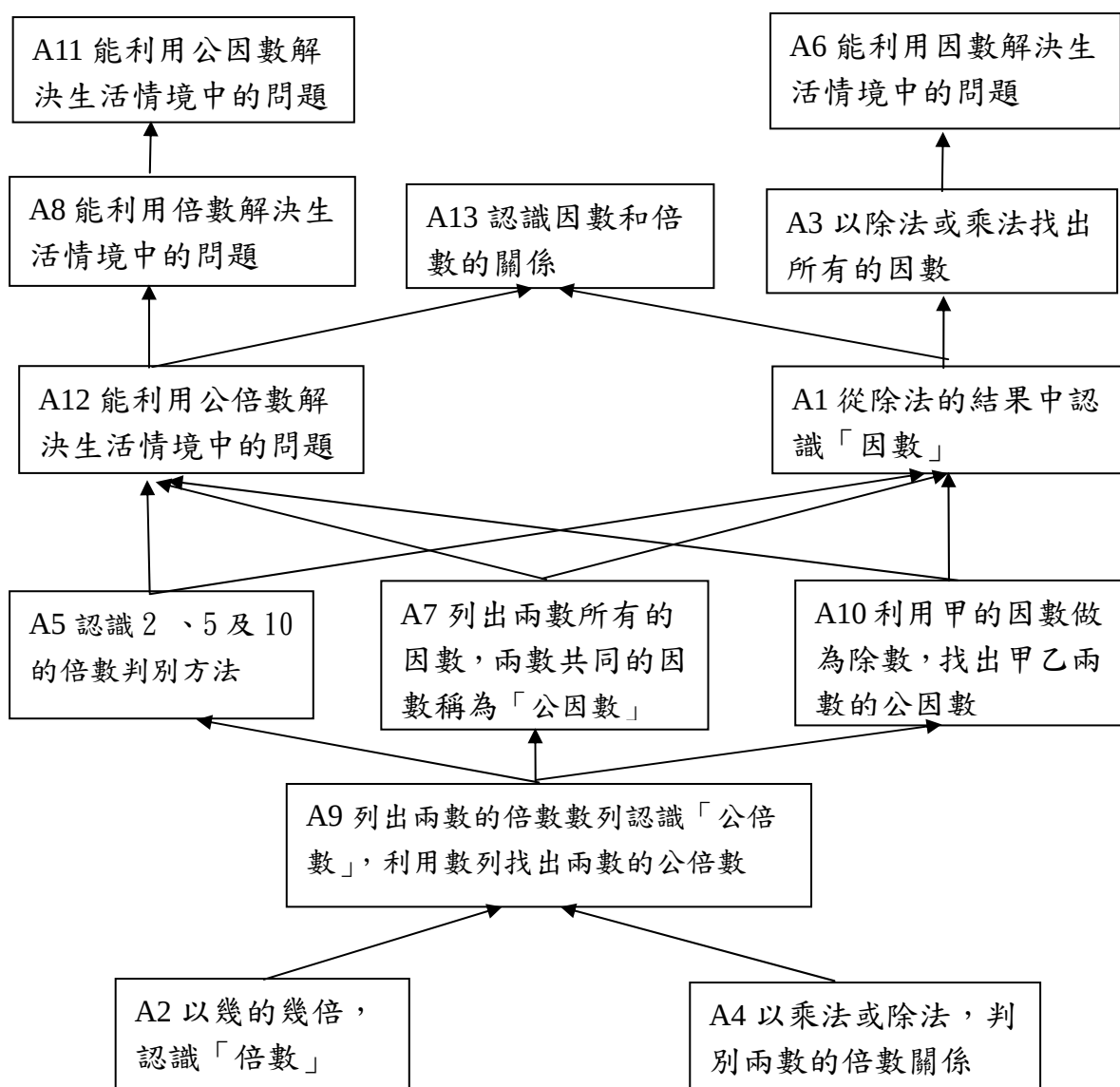


圖4 學生知識結構圖

四、專家效標之建立

根據分析建構反應題學生之解題歷程及個別訪談，在本研究中建構反應題分別為第 21、22、23 題，測驗內容包含找出所有的因數、所有的公因數及限定範圍內的公倍數，共包含 7 個認知屬性（A1、A3、A6、A7、A9、A11、A12），提供更多資訊作為專家判定學生是否擁有該認知屬性的效標，並減少判讀認知屬性的時間；其餘在建構反應題中未測得的認知屬性，則依照選擇題的作答情形進行判斷，若有學生在同一個認知屬性出現反應不一致的情形，則進一步做個別晤談，瞭解學生解題的過程與方法，藉以判斷學生是否具備該認知屬性。

五、評估準則

本研究使用辨識率作為評估準則。辨識率是指受試者的認知屬性狀態在認知診斷模式的估計是否與專家判定的結果一致，辨識率愈高，其估計的結果愈準

確。專家在判定學生是否具有該試題所必須的認知屬性時，首先根據建構反應題的作答反應，判定部分認知屬性的有無，再根據個別晤談及選擇題作答情形，判定受試者認知屬性的有無。辨識率計算公式如下：

DINA 模式診斷結果

		Yes(1)	No(0)
專家判斷	Yes(1)	n_{11}	n_{10}
	No(0)	n_{01}	n_{00}

$$\text{辨識率} = \frac{n_{11} + n_{00}}{N} \quad (\text{公式 4})$$

其中 N 為樣本數， n_{ij} 代表專家判斷為 i 且估計結果為 j 的事件總數，如 n_{11} 表示專家判斷受試者具備認知屬性且 DINA 模式判斷受試者亦具備認知屬性的事件總數。

肆、研究結果

一、DINA 模式與 IRT 模式參數值的關聯性。

本研究彙整受試者施測的資料後，使用試題對應認知屬性的 Q 矩陣，在 DINA 模式下進行分析，分別得到猜測參數 (g) 及粗心參數 (s)，同時使用試題反應理論 3PL 模式進行參數值分析，得到鑑別度參數 (a)、難度參數 (b) 及猜測度參數 (c) 並比較兩種模式試題參數值的相關性，參數值如表 18 所示：

表 18 DINA 模式與 3PL 模式的試題參數估計值

	DINA 模式		3PL 模式		
	g 值	s 值	a 參數	b 參數	c 參數
Item1	0.18	0.12	0.83	-0.55	0.23
Item2	0	0.25	0.18	-3.05	0.20
Item3	0.78	0.01	0.76	-0.84	0.20
Item4	0.71	0.05	0.13	-2.67	0.20
Item5	0.37	0.06	0.63	-0.90	0.23
Item6	0	0.06	0.46	-1.25	0.21
Item7	0.17	0.02	0.71	-1.34	0.18

表 18 DINA 模式與 3PL 模式的試題參數估計值 (續)

Item8	0.48	0	0.47	-1.68	0.14
Item9	0.55	0.02	0.58	-1.55	0.19
Item10	0.35	0.06	0.71	-0.50	0.20
Item11	0.40	0	0.62	-1.76	0.15
Item12	0.76	0.02	0.22	-1.85	0.16
Item13	0.40	0	0.33	-1.80	0.15
Item14	0.31	0.15	0.45	-0.05	0.25
Item15	0.56	0.11	0.36	-1.39	0.18
Item16	0.70	0.02	0.30	-1.71	0.16
Item17	0.39	0.05	0.45	-0.78	0.20
Item18	0.24	0.49	0.18	1.26	0.21
Item19	0.30	0.13	0.50	-0.51	0.17
Item20	0.12	0.11	0.69	-0.25	0.16
Item21	0.17	0.34	0.56	-0.55	0.14
Item22	0.11	0.10	0.83	-0.84	0.11
Item23	0.19	0.02	0.83	-3.05	0.18

由上表可得，DINA 模式的猜測參數值介於 0~0.78，試題猜測參數差異大，且有部分試題猜測參數大於 0.5 (I 3, I 4, I 9, I 12, I 15, I 16)，這可能是本研究樣本人數較少 (322 名)，DINA 模式中是以未具備該題所要求的認知屬性之受試者中，答對此題的比率為猜測機率，當這一個群體人數很少時，猜測猜數就易偏高；粗心參數值介於 0~0.49，除了 I 18 粗心參數值最高 (0.49) 之外，其餘題目的粗心參數值差異不大。使用試題反應理論 3PL 進行參數值分析，鑑別度參數值介於 0.13~0.84，猜測度參數 c 介於 0.11~0.25，難度參數 b 介於 -3.05~1.26。

綜合上述的兩種試題參數表可得，I18 在 IRT 分析的難度值最高，而且在 DINA 分析的粗心參數值 (s) 也最高，因此針對 I18 進行分析討論，題目內容及各選項的選項率如下：

第 18 題：游泳社團的男生有 45 人，女生 30 人，將男女混合編組，每組的男生一樣多，女生也一樣多，全部分完共有幾種編組的方法？

(① 1 ② 3 ③ 4 ④ 5) 種

選項	選項 1	選項 2	選項 3◎	選項 4
選項率	.07	.35	.40	.17
高分組	.01	.16	.64	.19
低分組	.11	.44	.24	.19

比較各選項的選項率，雖然選擇正確答案（選項 3）的比率最高，但是選項 2 的選項率高達 0.35，低分組有 44% 選擇選項 2，而高分組則有 16%，表示選項誘答力很高。研究者在進行個別晤談時，特別請學生寫出第 18 題的作答反應，發現學生的錯誤類型大致分 2 類：

能瞭解題目是要求找出「公因數」，但是不瞭解要找出全部的公因數有幾個，而是以直觀法選擇 45 和 30 的公因數：3。

能瞭解題目是要求找出「所有的公因數有幾個」，但是在過程中有缺漏（容易缺少公因數 1 或公因數 15），才會選擇選項 2。

綜上所述，學生的錯誤原因是在學習因數與倍數單元中常見的類型，而且第 18 題的選項 2 確實具有誘答性，因此本測驗的第 18 題將予以保留。

本研究將 DINA 模式試題參數與 IRT 3PLM 中的參數值進行 Pearson 相關分析比較，結果如下：

（一）猜測度參數

透過相關分析比較 DINA 模式下猜測參數 g 值與 IRT 3PL 猜測度參數 c 值，結果顯示 DINA 模式的猜測度參數與 IRT 模式的 c 參數經過相關分析後，未達到顯著相關（ $r=-.023$ ），探究其原因在於 IRT 模式中猜測參數值為整體受試者的猜測參數，但是 DINA 模式中是以未具備該題所要求的認知屬性之受試者中答對此題的比率為猜測機率，當這一個群體人數很少時，猜測參數就易偏高，本研究的樣本人數是 322 名，可能是造成兩種模式的猜測參數相關係數低的原因。

（二）鑑別度參數

DINA 模式假設當受試者具備解該題目所需之認知屬性時，即能正確回答該題，但是受試者答對該試題的機率會受到粗心 s 和猜測 g 兩個參數的影響（de la Torre, 2004），因此本研究將 DINA 模式試題參數 $1-s-g$ 值，與 IRT 模式的鑑別度參數 a 值進行 Pearson 相關分析，結果顯示 DINA 模式的 $1-s-g$ 值與 IRT 模式的 a 參數進行相關分析後，達到顯著相關（ $r=.802$ ），探究其原因在於 IRT 模式的鑑別度參數代表該試題能區辨高低能力的學生，而 DINA 模式的 $1-s-g$ 值是將高分組正確回答率（ $1-s$ ）與低分組可能答對的機率（ g ）互相比較，兩者試題參數計算時都使用到整體受試者中之群體，以區別高低分組的學生，因此試題參數存在高度正相關。

二、比較結合知識結構 Q 矩陣設計之 DINA 模式估計成效。

在 DINA 模式下，三種不同的 Q 矩陣設計，即試題對應認知屬性的 Q 矩陣、結合專家知識結構的 Q 矩陣與結合學生知識結構的 Q 矩陣認知屬性辨識率比較，結果如表 19：

表 19 三種不同 Q 矩陣設計辨識率比較（%）

	Q 矩陣	結合專家知識結構	結合學生知識結構
		Q 矩陣	Q 矩陣
A1	84	88	81
A2	83	84	82
A3	86	88	84
A4	80	83	82
A5	91	95	87

表 19 三種不同 Q 矩陣設計辨識率比較 (%) (續)

A6	80	82	76
A7	80	80	82
A8	79	82	92
A9	81	82	80
A10	91	93	96
A11	82	85	85
A12	74	77	73
A13	86	94	88
平均	83	86	84

註：陰影表示最高之診斷辨識率

由上表可得，Q 矩陣的辨識率介於 74%~91%，全部認知屬性的平均辨識率為 83%；結合專家知識結構的 Q 矩陣辨識率介於 77%~95%，全部認知屬性的平均辨識率為 86%；結合學生知識結構的 Q 矩陣辨識率介於 73%~96%，全部認知屬性的平均辨識率為 84%。

比較 Q 矩陣與結合專家知識結構的 Q 矩陣辨識率，發現結合專家知識結構的 Q 矩陣，在全部 13 個認知屬性的辨識率都高於 Q 矩陣，可能原因為：結合專家知識結構的 Q 矩陣能提供較多的判讀資訊，經過 DINA 模式的分析後與專家判定的結果較有一致性，因此認知屬性的辨識率較高。

比較 Q 矩陣與結合學生知識結構的 Q 矩陣辨識率，發現結合學生知識結構的 Q 矩陣有 6 個認知屬性的辨識率高於 Q 矩陣，尤其學生知識結構中較上位的認知屬性 (A7、A8、A10、A11) 差異較明顯，而且以平均辨識率比較，結合學生知識結構的 Q 矩陣平均辨識率較高，可能原因為：結合學生知識結構的 Q 矩陣中，由於加入認知屬性的難易程度，因此提供判讀的資訊較多，而且上位的認知屬性對學生而言較為困難，經過 DINA 分析後的結果會與專家判定較有一致性，因此辨識率較高。

比較結合不同知識結構的 Q 矩陣辨識率，發現全部 13 個認知屬性中，結合專家知識結構的 Q 矩陣有 9 個認知屬性的辨識率較高，而結合學生知識結構的 Q 矩陣有 4 個認知屬性的辨識率較高，可能原因為：在 Q 矩陣設計中加入專家依照教學順序編制的階層性，經過 DINA 分析後與專家判定的結果較具一致性，所以多數的認知屬性辨識率較高；在 Q 矩陣中加入學生知識結構中認知屬性的難易程度後，發現違反專家知識結構順序性的認知屬性 (A7、A8、A10、A11) 成為較上位的認知屬性，意即學生認為這些概念較困難所以表現較差，因此經過 DINA 分析後，反而會與專家判定的結果較一致。

伍、結論與建議

本研究主要是以九年一貫能力指標「5-n-03 能理解因數、倍數、公因數與公倍數」編製診斷測驗，分別以 DINA 模式及 IRT 模式 3PL 進行分析，比較兩種模式試題參數值之間的關係，並探討在 DINA 模式下結合不同知識結構的 Q 矩陣設計，是否影響認知屬性的辨識率，得到下列結論：

(一) DINA 模式的猜測參數 g 與 IRT 模式的猜測參數 c 相關係數低，而 DINA 模式的 $1-s-g$ 參數與 IRT 模式鑑別度參數 a 有高度正相關。

(二) 比較三種不同的 Q 矩陣設計，結果顯示：結合專家知識結構的 Q 矩陣認知屬性平均辨識率最高，其次為結合學生知識結構的 Q 矩陣認知屬性平均辨識率，Q 矩陣的認知屬性平均辨識率最低。

(三) 結合專家知識結構的 Q 矩陣，在全部 13 個認知屬性的辨識率，都高於 Q 矩陣；Q 矩陣有 7 個認知屬性的辨識率高於結合學生知識結構的 Q 矩陣；專家知識結構的 Q 矩陣有 9 個認知屬性的辨識率，高於結合學生知識結構的 Q 矩陣。

(四) 結合不同知識結構的 Q 矩陣提供的資訊比 Q 矩陣多，經過 DINA 模式分析後的結果與專家判定一致性較高，所以本研究的結論為：在 Q 矩陣設計中結合專家知識結構或學生知識結構，都有助於提升認知屬性的辨識率。

(五) 比較兩種 Q 矩陣，結合專家知識結構的 Q 矩陣辨識率高於結合學生知識結構的 Q 矩陣，可能原因為：結合專家知識結構的 Q 矩陣設計，經過 DINA 模式分析所得的結果與專家判定的結果一致性較高，而在學生知識結構中部分認知屬性的上下位關係違反專家知識結構，當學生認為這些概念較困難、表現較差，經過 DINA 分析後反而會與專家判定的結果較一致。因此，本研究的結論為：在 Q 矩陣設計中加入專家依據教學順序編製的階層性，比加入學生知識結構中認知屬性的難易順序的階層性，更能提升認知屬性的辨識率。

本研究尚有不完備之處，提出以下幾項建議，供未來相關研究的參考。

(一) 本研究以九年一貫數學能力指標「5-n-03 能理解因數、倍數、公因數與公倍數」編製診斷測驗，進行抽樣施測及資料分析，尚未將研究結果進行實際的補救教學，建議後續研究者可以與教學現場結合，探討補救教學的成效。

(二) 本研究僅使用認知診斷中的 DINA 模式進行估計，建議後續研究者可使用其他認知診斷模式（如：G-DINA、HO-DINA...等）探究其估計成效。

(三) 本研究使用 OT 演算法產生學生知識結構，後續研究者可使用不同的演算法進行知識結構分析。

(四) 本研究的結論顯示 DINA 模式的猜測參數 g 與 IRT 模式的猜測參數 c 相關係數低，可能的原因式樣本人數造成，未來可提升研究樣本人數，探討此現象是否仍然存在。

謝誌

本研究感謝國科會之經費補助，計畫編號 NSC 100-2410-H-656 -007。

參考文獻

中文部分

- 王文卿 (2010)。DINA 模式與 G-DINA 模式參數估計比較。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 白曉珊 (2008)。以知識結構及貝氏網路為基礎之數學教材及電腦適性測驗。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 李浚淵 (2003)。以知識結構為主的診斷測驗編製及其在補救教學分組之應用——以國小數學領域五年級因數與倍數單元為例。國立臺中教育大學數學教育學系在職進修教學碩士論文。
- 汪端正 (2008)。適性診斷測驗與數位個別指導教材之研發-以國小六年級質數與合數單元為例。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 何欣玫 (2004)。國小六年級因數與倍數之數學解題溝通能力研究。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 何秀芳 (2009)。國小五年級「線對稱圖形」單元教材與電腦化適性診斷測驗。國立臺中教育大學教學碩士學位暑期在職進修專班碩士論文。
- 余民寧 (2009)。試題反應理論(IRT)及其應用。臺北市：心理出版社。
- 吳育楨 (2008)。國小六年級學童因數與倍數概念階層之模糊詮釋結構模式分析。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 林佩如 (2002)。國小學童因數解題與迷思概念之研究。國立屏東教育大學數理教育研究所論文。
- 林婉星 (2008)。以知識結構為基礎之電腦化適性數學測驗線上更新結構機制之研發。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 林立敏 (2007)。連結不同知識結構之電腦適性學習系統研發。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 南一文教事業 (2011)。第九冊數學科教學指引。南一文教事業出版。
- 邱慧珍 (2002)。國小學童倍數解題及迷思概念之研究。國立屏東教育大學數理教育研究所論文。
- 卓淑瑜 (2011)。不同認知診斷適性測驗演算法結合知識結構之成效比較。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 教育部 (2003)。國民中小學九年一貫課程綱要。台北：教育部。
- 陳亭宇 (2010)。DINA 模式與 G-DINA 模式參數不變性探討。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 許曜瀚 (2008)。基於學生概念結構之適性測驗演算法。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 康軒文教事業 (2011)。第九冊數學科教學指引。康軒文教事業出版。
- 國家教育研究院 (2011)。第九冊數學科教學指引。國家教育研究院。
- 莊惠萍 (2007)。不同知識結構連結之適性測驗演算法成效。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 莊銘豪 (2008)。以知識結構為基礎的試題順序結構分析軟體之研發。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 曾彥鈞 (2006)。以知識結構為基礎的適性診斷測驗系統及降低猜測機制之研發。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 劉伊祝 (2008)。高雄市小五學生因數與倍數單元錯誤類型與成因之探討。屏東科技大學技術及職業教育研究所碩士論文。

- 劉育隆 (2007)。題組式適性診斷測驗系統之建置。國立臺中教育大學教育測驗統計研究所碩士論文。
- 劉育隆 (2012)。智慧型雲端診斷測驗與適性學習路徑模式之研究-以微分算則為例。亞洲大學資訊工程學系博士論文。
- 翰林文教事業 (2011)。第九冊數學科教學指引。翰林文教事業出版。
- 謝哲仁、林榮貴 (2006)。國小可操作視覺化之數學因數與倍數單元電腦活動輔助學習設計之研究。理工研究學報，40 (1)，23-45。

外文部分

- Airasian, P. W. & Bart, W. M. (1973). Ordering theory: A new and useful measurement model. *Educational Technology*, 5, 56-60.
- de la Torre, J. (2008). An empirically-based method of Q-matrix validation for the DINA model: Development and applications. *Journal of Educational Measurement*, 45, 343-362.
- de la Torre, J. (2009a). A cognitive diagnosis model for cognitively based multiple-choice options. *Applied Psychological Measurement*, 33(3), 163-183.
- de la Torre, J. (2009b). DINA model and parameter estimation: A Didactic. *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, 34(1), 115-130.
- de la Torre, J. & Douglas, J. (2004). Higher-order latent trait models for cognitive diagnosis. *Psychometrika*, 69(3), 333-353.
- de la Torre, J. & Douglas, J. (2008). Model evaluation and multiple strategies in cognitive diagnosis: An analysis of fraction subtraction data. *Psychometrika*, 73(4), 595-624.
- de la Torre, J. & Lee, Y. S. (2010). A note on the invariance of the DINA model parameters. *Journal of Educational Measurement*, 47(1), 115-127.
- Junker, B. W., & Sijtsma, K. (2001). Cognitive assessment models with few assumptions, and connections with nonparametric item response theory. *Applied Psychological Measurement*, 12, 55-73.
- Leighton, J. P., Gierl, M. J., & Hunka, S. M. (2004). The attribute hierarchy method for cognitive assessment: a variation on Tatsuoaka's rule space approach. *Journal of Educational Measurement*, 41(3), 205-237.
- Load, F. M. (1980). *Applications of item response to practical problems*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.
- Nichols, P. D. (1994). A framework for developing cognitively diagnostic assessment. *Review of Educational Research*, 64(4).
- Rupp, A. & Templin, J. (2008). The effects of q-matrix misspecification on parameter estimates and classification accuracy in the DINA model. *Educational and Psychological Measurement*, 68(1), 78-96.
- Tatsuoka, K. K. (1985). A Probabilistic Model for Diagnosing Misconceptions in the Pattern Classification Approach. *Journal of Educational Statistics*, 10, 55-73.
- Wu, H. M., Kuo, B. C., & Yang, J. M. (2012). Developing a Knowledge Structure-based Computerized Adaptive Test System. *Educational Technology & Society*, 15(2), 73-88.
- Zimowski, M. F., Muraki, E., Mislevy, R. J., & Bock, R. D. (1996). *BILOG-MG: Multiple-group IRT analysis and test maintenance for binary items* [Computer program]. Chicago, IL: Scientific Software.
- 佐藤隆博 (1979)。ISM 法による学習要素の階層的構造の決定。日本教育工学会雑誌，4 (1)，9-16。